第 陆 章

柯西准则

I， 柯西准则定义

柯西准则又称柯西极限存在准则，柯西收敛原理，它给出了收敛的充分必要条件。

中文名：柯西极限存在准则

外文名： Cauchy’s convergence test

II， 柯西准则应用方面

它是用来判断某个式子是否收敛的充要条件（不限于数列）；在数列，数项级数，函数，反常积分，函数列和函数项级数都有应用。其每个方面都对应一个柯西准则，本章将按不同方面对准则进行说明。

III， 柯西准则及其证明

（一） 数列

（1） 数列的柯西收敛准则

数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是：

对于任意给定的正数 ε， 总存在正整数 N， 使得当 n>N, m>N 时有

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

我们把满足该条件的$\{x_n\}$称为柯西序列。

那么上述定理可表述成：数列$\{x_n\}$收敛，当且仅当它是一个柯西序列。

该准则的几何意义表示，数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是：该数列中的元素随着序数的增加而愈发靠近，即足够靠后的任意两项都无限接近。

（2） 证明

必要性：

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \eta$，则$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in N^+$，当 m, n>N 时，有

$$|x_n - \eta| < \frac{\varepsilon}{2}, |x_m - \eta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

那么

$$|x_n - x_m| = |(x_n - \eta) - (x_m - \eta)|$$

$$\le |x_n - \eta| + |x_m - \eta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

充分性：

由于数列的柯西收敛准则是实数连续性的体现之一，所以用实数公理——戴德金定理（详见第一卷第八章）证明$\{x_n\}$收敛。

首先证明柯西序列是有界的。

根据柯西序列的定义，对任意 ε >0，存在正整数 N，当 m, n>N 时，有$|x_n - x_m| < \varepsilon$。

于是取 m=N+1，则当 n>N 时，$|x_n - x_{N+1}| < \varepsilon$。解得

$x_{N+1} - \varepsilon < x_n < x_{N+1} + \varepsilon$，

即当 n>N 时，$\{x_n\}$既有上界又有下界，所以是有界的。

向上述数列中添加$\{x_n\}$的前 N 项得到$\{x_n\}$本身，则由于前 N 项都是确定的实数，不会改变$\{x_n\}$的有界性（前 N 项最多只会改变$\{x_n\}$的上、下界）。故对任意正整数 n，$\{x_n\}$都是有界的。

其次证明柯西序列收敛。

设$\{x_n\}$⊆[a,b]，有一个实数集 A，A 中的任一元素 c 满足：区间(-∞,c)中最多有$\{x_n\}$中的有限项（注意用词“最多”，意味着可以有 0 项），由于 A 为所有满足条件的 c 的集合，因此 A 的下界为-∞，上界为 c 能取到的最大值，而$\{x_n\}$中的无限项都落在[c,+∞)。并把 A 在 R 中的补集设为 B，则：

①由取法可知 a∈A，并且显然 b∈B。即 A 和 B 都是非空数集。

②A∪B=R。

③根据集合 A、B 的定义，A 中任意元素都小于 B 中的任意元素。

由戴德金定理得，存在唯一实数 η，使 η 要么是 A 中的最大值，要么是 B 中的最小值，即 η 为 A，B 的分界点

则对$\forall \varepsilon > 0, \eta - \varepsilon \in A$

④由 A 的定义可知，

$$\exists m > N, \eta - \varepsilon < x_m \le \eta + \varepsilon$$

根据已知条件，当 m,n>N 时，$|x_n - x_m| < \varepsilon$。

于是$x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$

联立④中的不等式，可得到

$$(\eta - \varepsilon) - \varepsilon < x_n < (\eta + \varepsilon) + \varepsilon$$

$$即\eta - 2\varepsilon < x_n < \eta + 2\varepsilon$$

也就是当 n>N 时，不等式$|x_n - \eta| < 2\varepsilon$ 成立

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = \eta$$

即该数列收敛。

（二） 函数

考虑到数列是特殊的函数（即定义域为正整数集），可以猜想，函数的敛散性也应当有类似的结论，这就是接下来要说的函数的柯西收敛准则。

函数的柯西收敛准则

（1） $x \longrightarrow x_0$时的准则

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$收敛的充要条件为：

对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得当

0<$|x_1 - x_0| < \delta$，$0 < |x_2 - x_0| < \delta$时，有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

（2） $x \to \infty$时的准则

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$收敛的充要条件为：

对于任意给定的正数ε，总存在正数X，使得当
$|x_1| > X$，$|x_2| > X$时，有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

x_1，x_2是 f(x)的定义区间上任意两个实数。
以上准则针对单侧极限依然有效。
该准则的充要条件又称为（函数的）柯西条件，也就是说，函数收敛当且仅当函数满足柯西条件。

证明：
必要性：
（1） $x \longrightarrow x_0$时的准则

设$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$=a，则$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,

当$0 < |x_1 - x_0| < \delta, 0 < |x_2 - x_0| < \delta$时，有

$$|f(x_1) - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |f(x_2) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

那么，

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |[f(x_1) - a] - [f(x_2) - a]| \\ &< |f(x_1) - a| + |f(x_2) - a| < \varepsilon \end{aligned}$$

（2） $x \to \infty$时的准则

设$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$=a，则$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$,

当$|x_1| > X, |x_2| > X$时，有

$$|f(x_1) - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |f(x_2) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

那么，

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |[f(x_1) - a] - [f(x_2) - a]| \\ &< |f(x_1) - a| + |f(x_2) - a| < \varepsilon \end{aligned}$$

充分性：
由于函数极限和数列极限可以通过归结原则联系起来，所以要证明函数收敛，可以转化为证明数列收敛。而数列收敛的柯西准则上面已经证明了，所以把已知条件转化为求数列极限是证明的重心。
归结原则（或称海涅定理）：
设 f(x)在x_0的某个去心邻域（或|x|大于某个正数时）有定义，那么 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$=A（或$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$=A）的充要条件是，对在$x_0$的某个去心邻域内的任意收敛于$x_0$并且满足$x_n \neq x_0$的数列$\{x_n\}$（或绝对值大于某个正数的任意发散到无穷大的数列$\{x_n\}$），都有数列$\{f(x_n)\}$收敛到 A，即$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$=A。

这个原则在这里不证明，只需要注意的是定理中的“任意”二字。另外，如果函数极限是单侧极限，则相应的任意数列都是单调数列（右极限对应任意单调递减数列，左极限对应任意单调递增数列）。

（1） $x \longrightarrow x_0$时的准则

设$\{x_n\}$是x_0的某个去心邻域内的任意收敛到x_0并且$x_n \neq x_0$的数列，由数列极限的定义，$\forall \delta > 0, \exists N \in N^+$ （注意这里的 δ 就是柯西条件的 δ），当 m,n>N 时，有

$0<|x_n - x_0| < \delta$，$0 < |x_m - x_0| < \delta$,

而由 $0<|x_m - x_0|<\delta$，$0<|x_n - x_0|<\delta$ 可知

$|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$,

换句话说，当 m,n>N 时，有$|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$,

这也就是数列的柯西收敛准则，由柯西收敛准则可知数列$\{f(x_n)\}$收敛。又因为$\{x_n\}$的任意性，得到任意$\{x_n\}$的极限都相等。于是根据归结原则，f(x)收敛。

（2） $x \rightarrow \infty$时的准则

设$\{x_n\}$是绝对值大于某个正数的任意发散到无穷大的数列，由数列发散到无穷大的定义， $\forall X > 0, \exists N \in N^+$（注意这里的 X 就是柯西条件的 X），当 m,n>N 时，有

$|x_m|>X$，$|x_n|>X$，

而由$|x_m|>X$，$|x_n|>X$ 可知

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

换句话说，当 m,n>N 时，有$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$，

这也就是数列的柯西收敛准则，由柯西收敛准则可知数列$\{f(x_n)\}$收敛。又因为$\{x_n\}$的任意性，得到任意$\{x_n\}$的极限都相等。于是根据归结原则，f(x)收敛。

（三） 反常积分

反常积分分为两种，一种是积分区间含有无穷大的反常积分（又叫做无穷限的反常积分），另一种是被积函数为无界函数的反常积分（又叫做无界函数的反常积分、瑕积分）。因此相应的柯西收敛准则有两种，两种准则的描述有些区别，但都可以根据函数的柯西收敛准则来证明。

反常积分的柯西收敛准则

（1） 无穷限的反常积分

无穷限的反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的充要条件是，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 X，使得当 q>p>X 时，有$\left|\int_p^q f(x)dx\right| < \varepsilon$

无穷限的反常积分$\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 收敛的充要条件是，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 X，使得当 p<q<-X 时，有$\left|\int_p^q f(x)dx\right| < \varepsilon$

前提是闭区间[p,q]⊂[a,+∞)（或(-∞,a]）。

（2） 瑕积分

瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ （其中$\lim_{x\to a} f(x)\to\infty$）收敛的充要条件是：

对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当 a<p<q<a+δ 时，有

$|\int_p^q f(x)dx| < \varepsilon$

其中 x=a 是 f(x)的瑕点。

瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ （其中$\lim_{x\to b} f(x)\to\infty$） 收敛的充要条件是，

对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当 b-δ<p<q<b 时，

有$|\int_p^q f(x)dx| < \varepsilon$

其中 x=b 是 f(x)的瑕点。前提是闭区间[p,q]⊂(a,b]（或[a,b)）。

证明：

（1） 无穷限的反常积分

设 F（u）= $\int_a^u f(x)dx$。由无穷限反常积分收敛的定义可知，

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，当且仅当 $\lim_{u\to+\infty} \int_a^u f(x)dx = \lim_{u\to+\infty}$ F（u）收敛。于是根据函数的柯西收敛准则，$\lim_{u\to+\infty}$ F（u） 收敛的充要条件是，对于任意 ε>0，总存在 X>0，使得当 p>X，q>X 时，有

$|F(q)-F(p)|<\varepsilon$，由定积分的性质可知

$|F(q)-F(p)| = |\int_a^q f(x)dx - \int_a^p f(x)dx| = |\int_p^q f(x)dx| < \varepsilon$

把上述过程综合起来，就得到$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的充要条件是：对于任意 ε>0，总存在 X>0，使得当 p>X，q>X 时，有$|\int_p^q f(x)dx| < \varepsilon$。

由此得证无穷限反常积分的柯西收敛准则。$\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 同理可证。

（2） 瑕积分

设 F（u）= $\int_u^b f(x)dx$ 。由瑕积分收敛的定义可知，$\int_a^b f(x)dx$ 收敛（x=a 是瑕点），当且仅当 $\lim_{u\to a^+} \int_u^b f(x)dx = \lim_{u\to a^+}$ F（u） 收敛。于是根据函数的柯西收敛准则，$\lim_{u\to a^+}$ F（u）收敛的充要条件是，对于任意给定的正数

ε，总存在正数 δ，使得当
0<p-a<δ，0<q-a<δ 时，
有$|F(\mathrm{q})-F(\mathrm{p})|<\varepsilon$,
由定积分的性质可知，

$$|F(\mathrm{q})-F(\mathrm{p})| = \left|\int_a^q f(x)dx-\int_a^p f(x)dx\right| = \left|\int_p^q f(x)dx\right| < \varepsilon$$

把上述过程综合起来，就得到 $\int_a^b f(x)dx$ （x=a 是瑕点）收敛的充要条件是，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当 0<p-a<δ，0<q-a<δ 时，有$\left|\int_p^q f(x)dx\right| < \varepsilon$

但是，0<p-a<δ，0<q-a<δ 等价于 a<p<a+δ，a<q<a+δ。令 p<q，即得到 a<p<q<a+δ，由此得证瑕积分的柯西收敛准则。

$\int_a^b f(x)dx$ （x=b 是瑕点）同理可证。