

# 第 肆 章

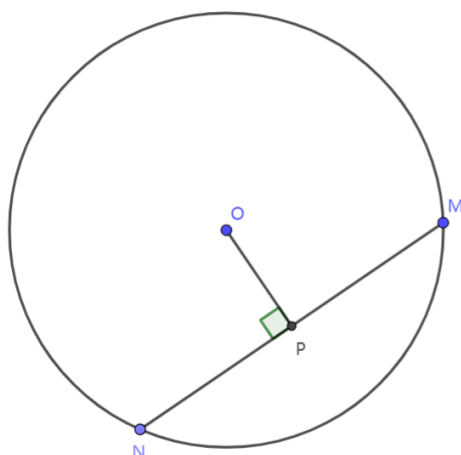
## 根心定理

### I. 根心定理概述

根心定理是圆中极其重要的一个定理，其适用范围是任意不同心三圆，本节着重研究根心定理

### II. 圆幂

在第二卷第十章中我们研究了圆幂定理，这是构造根心定理的基础。圆幂定理是相交弦定理，割线定理和切割线定理及其推论的统称，其对于圆  $O$  外任意一点  $P$ ，作直线过  $P$  并与圆相交于  $A, B$ ，作切线相切于  $C$ ，则  $PA \cdot PB = PC^2$ ，这是利用圆幂定理得出的结论，而设  $PA \cdot PB = PC^2 = k$ ，那么  $k$  为一定值，数学家们将  $k$  取名为圆幂，简称幂。



由于  $PC^2 = PO^2 - r^2$  【勾股定理】

那么圆幂的定义为

一点  $P$  对半径为  $R$  的圆  $O$  的幂  $k = PO^2 - R^2$

【注意：由于  $P$  可在圆内，因此圆幂不能理解为切线长的平方】

即有：圆内点的圆幂为负数，圆上点的圆幂为 0，圆外点的圆幂为正数。

这就是圆幂定理的由来

负数幂的绝对值为过点  $P$  且垂直于  $OP$  的弦长的一半的平方

【即上图中  $k = PM^2 = PN^2$ 】

### III. 根轴

定义：在平面上任给两不同心的圆，则对两圆圆幂相等的集合是一条直线，这条直线称为两圆的根轴 (radical axis)

另一角度也可以称两不同心圆的等幂点的轨迹为根轴

也可称等幂轴

根轴方程的求解

设两圆：

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0 \quad \text{【}\odot O_1\text{】}$$

$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 = 0 \quad \text{【}\odot O_2\text{】}$$

对于根轴上一点  $P(m, n)$

要满足  $PO_1^2 - r_1^2 = k = PO_2^2 - r_2^2$

即  $(m - a_1)^2 + (n - b_1)^2 - r_1^2 = (m - a_2)^2 + (n - b_2)^2 - r_2^2$

$$\Rightarrow m^2 - 2a_1m + a_1^2 + n^2 - 2b_1n + b_1^2 - r_1^2 = m^2 - 2a_2m + a_2^2 + n^2 - 2b_2n + b_2^2 - r_2^2$$

$$\Rightarrow 2(a_2 - a_1)m + 2(b_2 - b_1)n + a_1^2 + b_1^2 - r_1^2 - (a_2^2 + b_2^2 - r_2^2) = 0$$

设  $a_1^2 + b_1^2 - r_1^2 = f_1$ ,  $a_2^2 + b_2^2 - r_2^2 = f_2$

所以根轴方程为  $2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + f_1 - f_2 = 0$

其为一条直线

其斜率  $k_{\text{根}} = -\frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1}$

而直线  $O_1O_2$  斜率  $k_0 = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$

满足  $k_{\text{根}} \cdot k_0 = -1$

所以根轴与两圆心的连线垂直

看其特殊情况：当两圆相交时

$$\begin{cases} (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0 \\ (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 = 0 \end{cases}$$

该方程组有两组解，对应两圆的交点

两交点的圆幂相等【即  $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$ 】

则  $P$  可为这两点，那么根轴为过这两点的直线

即：两圆相交时，根轴是两圆公共弦所在的直线

当两圆相切时，两交点重合，由于根轴过该点且根轴与两圆心连线垂直

即：两圆相切时，根轴为两圆公切线

#### IV. 尺规作根轴

两圆相交、相切时，根轴为交点连线，这很简单，直接连线即可

两圆相离、内含时：

(1) 作一适当圆与两圆均相交【该适当圆圆心不能在两圆圆心连线上】

【设作  $\odot O$  与  $\odot O_1$ ,  $\odot O_2$  相交】

则  $\odot O$  与  $\odot O_1$  有一条根轴【即交点连线】

$\odot O$  与  $\odot O_2$  有一条根轴【也为交点连线】

两根轴交点设为  $P_1$

(2) 同上，再作一适当圆得出交点  $P_2$

(3) 那么直线  $P_1P_2$  即为所求根轴

#### V. 根心定理

定义：三个两两不同心的圆，会有三条根轴，三条根轴一定满足下列三种情况之一

(1) 三根轴两两平行

- (2) 三根轴完全重合  
 (3) 三根轴两两相交，但交于一点，即三线共点，该点称为三圆的“根心”

证明：设三圆

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \quad \text{【}\odot O_1\text{】}$$

$$x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0 \quad \text{【}\odot O_2\text{】}$$

$$x^2 + y^2 + D_3x + E_3y + F_3 = 0 \quad \text{【}\odot O_3\text{】}$$

根据一般方程有【设圆心  $O(a, b)$ ，半径为  $r$ 】

$$D = -2a, E = -2b, F = a^2 + b^2 - r^2 = f$$

而  $\odot O_1, \odot O_2$  根轴方程为

$$\begin{aligned} & 2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + f_1 - f_2 = 0 \\ \Rightarrow & [-2a_1 - (-2a_2)]x + [-2b_1 - (-2b_2)]y + f_1 - f_2 = 0 \\ & \text{即 } (D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0 \quad \text{【1 式】} \end{aligned}$$

同理：

$\odot O_1, \odot O_3$  根轴方程为

$$(D_1 - D_3)x + (E_1 - E_3)y + F_1 - F_3 = 0 \quad \text{【2 式】}$$

$\odot O_2, \odot O_3$  根轴方程为

$$(D_2 - D_3)x + (E_2 - E_3)y + F_2 - F_3 = 0 \quad \text{【3 式】}$$

可以发现【1 式】+【3 式】=【2 式】

那么联立三个方程实际上只有两个有效方程【取一式和三式】

$$\begin{cases} (D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0 \\ (D_2 - D_3)x + (E_2 - E_3)y + F_2 - F_3 = 0 \end{cases}$$

解有三种情况：

- (1) 无解：两直线平行，那么  $l_1 // l_3$   
 则  $l_1 // l_2 // l_3$
- (2) 无数解：两直线重合，两方程等价，那么【1 式】【2 式】【3 式】均等价  
 即  $l_2$  也与其重合
- (3) 仅有一解：两直线相交，那么直线  $l_2$  也应过交点  
 即  $l_1, l_2, l_3$  三线共点  
 证毕。