

# 第 三 章

## 琴生不等式

### I. 琴生不等式

琴生不等式以丹麦技术大学数学家约翰·延森（Johan Jensen）命名，它给出了积分的凸函数值和凸函数的积分值间的关系。

琴生不等式拥有多种形式，涉及微积分、概率密度函数、随机变量的偶数矩、替代有限形式、统计物理学、信息论、Rao-Blackwell 定理等方面，本节仅推出线性代数中的琴生不等式。

中文名：琴生不等式

外文名：Jensen Inequality

别称：詹森不等式

发明人：琴生（约翰·卢德维格·威廉·瓦尔德马尔·延森）（约翰·延森）

【Johan Ludwig William Valdemar Jensen】

[丹麦；数学家；工程师；(1859.5.8-1925.3.5)]

### II. 概述

- (1) 若  $f(x)$  是  $(a, b)$  上的凸函数，则对任意的  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$  有不等式：

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$$

当且仅当  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  时取等号

- (2) 若  $f(x)$  是  $(a, b)$  上的凹函数，则对任意的  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$  有不等式：

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$$

当且仅当  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  时取等号

### III. 加权形式

- (1) 若  $f(x)$  为区间  $(a, b)$  上的凸函数，则对任意  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$  且  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为正数有

$$f(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) \geq a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + \dots + a_nf(x_n)$$

即：若

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1$$

$$\text{则 } f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$$

- (2) 若  $f(x)$  为区间  $(a, b)$  上的凹函数

同上条件, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$$

#### IV. 不等式的证明

由 III 可知, 当  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$  时, III 中式子即为 II 中式子

那么我们只需证明 III 中式子即可

先仅考虑  $f(x)$  为凸函数

【1】 当  $n=1$  时,  $a_1 = 1$

$$f(a_1 x_1) \geq a_1 f(x_1) \text{ 化为 } f(x_1) = f(x_1)$$

显然成立

【2】 当  $n=2$  时,  $a_1 + a_2 = 1$

对于  $x_1, x_2$ , 有函数图像上两点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

构建两点直线  $y=G(x)=kx+b$

$$\text{则 } G(a_1 x_1 + a_2 x_2) = k(a_1 x_1 + a_2 x_2) + b = ka_1 x_1 + ka_2 x_2 + b$$

$$a_1 G(x_1) + a_2 G(x_2) = ka_1 x_1 + a_1 b + ka_2 x_2 + a_2 b$$

$$= ka_1 x_1 + ka_2 x_2 + (a_1 + a_2)b$$

$$= ka_1 x_1 + ka_2 x_2 + b$$

$$\text{所以 } G(a_1 x_1 + a_2 x_2) = a_1 G(x_1) + a_2 G(x_2)$$

由于  $f(x)$  为凸函数

则在区间  $(x_1, x_2)$  中, 恒有  $f(x) > G(x)$

$$\text{则 } f(a_1 x_1 + a_2 x_2) \geq G(a_1 x_1 + a_2 x_2)$$

当且仅当  $x_1 = x_2$  时取等号

$$\text{而 } a_1 G(x_1) = a_1 f(x_1) \quad a_2 G(x_2) = a_2 f(x_2)$$

$$\text{所以 } f(a_1 x_1 + a_2 x_2) \geq a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$$

成立

【3】 我们用数学归纳法证明  $n \geq 2$  时的情况

假设对  $n \geq 2$  时不等式 III- (1) 都成立

即

$$f(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n) \geq a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \dots + a_n f(x_n)$$

对任意  $n \geq 2$  恒成立

则当  $n=n+1$  时 III- (1) 右式

$$a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \dots + a_n f(x_n) + a_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$= (1 - a_{n+1}) \left[ \frac{a_1}{1 - a_{n+1}} f(x_1) + \frac{a_2}{1 - a_{n+1}} f(x_2) + \dots + \frac{a_n}{1 - a_{n+1}} f(x_n) \right] + a_{n+1} f(x_{n+1})$$

【注意:  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = 1$ , 则  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 - a_{n+1}$ 】

则蓝色式子之和为 1

□ 内的  $n$  项和可用琴生不等式, 即

$$(1 - a_{n+1}) \left[ \frac{a_1}{1 - a_{n+1}} f(x_1) + \frac{a_2}{1 - a_{n+1}} f(x_2) + \dots + \frac{a_n}{1 - a_{n+1}} f(x_n) \right] + a_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$\leq (1 - a_{n+1}) f\left(\frac{a_1}{1 - a_{n+1}} x_1 + \frac{a_2}{1 - a_{n+1}} x_2 + \dots + \frac{a_n}{1 - a_{n+1}} x_n\right) + a_{n+1} f(x_{n+1})$$

即为  $a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$  形式

用【2】中结论

上式

$$\begin{aligned} &\leq f[(1 - a_{n+1})\left(\frac{a_1}{1 - a_{n+1}}x_1 + \frac{a_2}{1 - a_{n+1}}x_2 + \dots + \frac{a_n}{1 - a_{n+1}}x_n\right) + a_{n+1}x_{n+1}] \\ &= f(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_{n+1}x_{n+1}) \end{aligned}$$

成立

由数学归纳法知不等式恒成立

若  $f(x)$  为凹函数，则上中  $G(x) > f(x)$  即可，证法同上

## V. 证明一些其他不等式

### (1) 幂平均不等式

若  $a_i > 0 (1 \leq i \leq n)$  且  $\alpha > \beta$

则有

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

成立，当且仅当  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  时取等号

加权形式为：

设  $a_i > 0, p_i > 0 (1 \leq i \leq n)$  且  $\alpha > \beta$

则有

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i a_i^\alpha}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i a_i^\beta}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

成立，当且仅当  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  时取等号

幂平均：

定义  $n$  个正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，以及实数  $\lambda (\lambda \neq 0)$

则这  $n$  个数的幂平均为

$$M_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\frac{a_1^\lambda + a_2^\lambda + \dots + a_n^\lambda}{n}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

### (2) 证明

仅需证明其加权形式即可，即  $p_i = 1$  就是原不等式

记

$$M_\alpha = \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i^\alpha}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad M_\beta = \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i^\beta}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

令  $y_i = x_i^\beta, \mu = \frac{\alpha}{\beta}$

考虑函数  $f(y) = y^\mu$  的凹凸性

知  $f''(y) = \mu(\mu - 1)y^{\mu-2}$

【1】  $\alpha > 0$  时， $\mu > 1$  或  $\mu < 0$ ，则对  $y_i = x_i^\beta \in R_+$

有  $f''(y) > 0$

即  $f(y)$  在  $R_+$  上为凹函数

由 Jensen 不等式有

$$\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\sum_{i=1}^n p_i} y_i^\mu \geq \left( \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\sum_{i=1}^n p_i} y_i \right)^\mu$$

即  $M_\alpha^\alpha \geq M_\beta^\alpha$

证毕

**【2】** 若  $\alpha < 0$ , 则  $0 < \mu < 1, f''(y) < 0$

则  $f(y)$  在  $R_+$  上为凸函数

证法同上