第 贰 章

泰勒公式

I. 泰勒公式

泰勒公式，应用于数学，物理领域，是一个用函数在某点的信息描述其附近取值的公式。若函数足够平滑，在已知函数在某一点的各阶导数值的情况下，泰勒公式可以用这些导数值做系数构建一个多项式来近似函数在这一点的邻域中的值。泰勒公式还给出了这个多项式和实际函数值的偏差。

提出者：布鲁克·泰勒【Brook Taylor(1685.8.18-1731.11.30)】

中文名：泰勒公式

外文名：Taylor formula

特例：麦克劳林级数，拉格朗日定理

泰勒以微积分学中将函数展开成无穷级数的定理著称于世。

II. 定理描述

泰勒公式是将一个在$x=x_0$处具有 n 阶导数的函数 f(x)利用关于（$x-x_0$）的 n 次多项式来逼近函数的方法

简单来说，就是函数的多项化，例如，$f(x)=e^x$不是一个多项式函数，我们要将其多项化，即将其变成$e^x=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$的形式以便于求某一特定函数值

若函数 f(x)在包含x_0的某个闭区间[a,b]上具有 n 阶导数

且在开区间(a,b)上具有(n+1)阶导数，则对闭区间[a,b]上任意一点 x，成立下式：

$$f(x)=\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

等号后面称为 f(x)在x_0处的泰勒展开式

$R_n(x)$称为拉格朗日余项，是$(x-x_0)^n$的高阶无穷小

III. 发展历程

（I） 函数多项化

对于一些函数，像 f(x)=x，$f(x)=ax^2+bx+c$

等这样的形式，给定一个 x，我们都能笔算出相应的函数值，这样的函数大多为多项式函数，但是，像 f(x)=sinx，$f(x)=e^x$等就比较困难，我们要求 sin4，$e^{1.7}$等这样的值，用笔算可能就会比较困难，数学家们就在猜想，既然它们同在一个坐标平面内，那么我们能不能用临摹的方式，做一个和 sinx，e^x等这些函数长的差不多的一个多项式函数呢？即 sinx，e^x等这些函数能否用一个多项式函数来近似表达呢？这就是泰勒展开的出发点。

（II） 泰勒展开

我们用物理中的位移(x)，速度(v)，加速度(a)，急动度(j)来便

于理解【急动度：加速度变化率】

我们知道$v = x'$，$a = v'$，$j = a'$

那么有：$j = a' = v'' = x'''$

现有甲，乙两个人，其运动仅与这四个量有关，那么若使这两个人运动轨迹完全相同，就必须使得两人这四个量都相同。

这样就能理解了，如果将甲的轨迹视为 f(x)，乙的轨迹视为 g(x)，若 f(x)=g(x)，那么必须满足$f'(x) = g'(x), f''(x) = g''(x), f'''(x) = g'''(x), \ldots, f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)$，如果 g(x)为一个多项式函数，那么称 g(x)是 f(x)的泰勒展开。

设 f(x)为原函数，g(x)为展开式

所以满足 f(x)=g(x)

$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$，我们有$g(0) = a_0 = f(0)$

$$g'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + n \cdot a_nx^{n-1}$$

$$g''(x) = 2a_2 + 3 \times 2a_3x + \cdots + n(n-1) \cdot a_nx^{n-2}$$

不难发现，g(x)求 n 次导后，a_1，a_2，…，a_{n-1}的项全为 0 了

因此我们仅需看最高次项

原	一阶	二阶	三阶	……	n 阶
a_nx^n	na_nx^{n-1}	$n(n-1)a_nx^{n-2}$	$n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$	……	$n!\,a_nx^0$

即最终$g^{(n)}(0) = n!\,a_n$

而$f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = n!\,a_n$

所以$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

那么有

$$g(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

这个式子就是泰勒展开，但严格说来，这个式子还不够一般

该式称为麦克劳林展开或麦克劳林公式，是泰勒公式的一个特殊形式，于 1719 年提出

该式选取零点为基准点，但更一般的情况下，我们可以选取定义域上的任意一点为基准点，如选取某一点x_0，这个时候我们可将 f(x)图像平移，使得x_0与 0 重合，即将其平移变换，那么 0 时麦克劳林展开式仍然成立，但此时 0 即为x_0，我们可将 x 变为$x - x_0$即可

就得到泰勒展开

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

（III） 拉格朗日余项

观察对比上式和 II 中的原式，少了一个$R_n(x)$，即拉格朗日余项

出现$R_n(x)$的原因在于：

一般来说，这种多项化方法展开后的多项式应该有无数项

但在计算时，我们不可能算至第无数项，因此我们只能给出一个近似值，而后面那一大串式子对结果影响不大，就被称为余项，

即拉格朗日余项$R_n(x)$

我们可以根据需要，选择合适的 n 取值，后面的项称为余项

$$f(x)=\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+\ldots+\frac{f^{(\infty)}(x_0)}{\infty!}(x-x_0)^{\infty}\text{【余项}R_n(x)\text{】}$$

$R_n(x)$余项是为计算确定误差的式子，对于$R_n(x)$的确定，我们有两种理论。

【I】 皮亚诺型余项

皮亚诺猜想：可以将$R_n(x)$与最后一项$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$比较大小，用作商的方式

$$\frac{R_n(x)}{末项}=\frac{\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}+\cdots+\frac{\frac{f^{(\infty)}(x_0)}{\infty!}(x-x_0)^{\infty}}{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$
$$=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{f^{(n)}(x_0)(n+1)}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(\infty)}(x_0)\cdot n!}{f^{(n)}(x_0)\cdot\infty!}(x-x_0)^{\infty-n}$$

如果让该值无限小，即$R_n(x)$<<末项，此时$x\longrightarrow x_0$

那么$R_n(x)$对近似值无影响

此时$R_n(x)$为$(x-x_0)$的高阶无穷小

记作$R_n(x)=o(x^n)$

【II】 拉格朗日型余项

余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+\ldots+\frac{f^{(\infty)}(x_0)}{\infty!}(x-x_0)^{\infty}$$

令$S(x)=(x-x_0)^{n+1}$

发现$R_n(x_0)=0$，$S(x_0)=0$

则

$$\frac{R_n(x)}{S(x)}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{S(x)-S(x_0)}$$

由柯西中值定理

$$\frac{R_n(x)}{S(x)}=\frac{R_n'(\xi)}{S'(\xi)}$$

我们有$R_n'(\xi)=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!}(\xi-x_0)^n+\cdots\ldots$

$$S'(\xi)=(n+1)(\xi-x_0)^n$$

又有$R_n'(x_0)=0$，$S'(x_0)=0$

进而

$$\frac{R_n'(\xi)}{S'(\xi)}=\frac{R_n'(\xi)-R_n'(x_0)}{S'(\xi)-S'(x_0)}=\frac{R_n''(\xi_1)}{S''(\xi_1)}$$

以此类推

我们可得出

$$\frac{R_n(x)}{S(x)}=\frac{R_n'(\xi_1)}{S'(\xi_1)}=\frac{R_n''(\xi_2)}{S''(\xi_2)}=\frac{R_n'''(\xi_3)}{S'''(\xi_3)}=\ldots=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{S^{(n+1)}(\xi)}$$

而$S^{(n+1)}(\xi)=(n+1)!$为常数，不能再求导了

而由柯西中值定理条件有：

$$x_0<\ldots<\xi_3<\xi_2<\xi_1<x_0$$

好了，现在

$$\frac{R_n(x)}{S(x)}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

我们只要求$R_n^{n+1}(\xi)$的值即可

再搬出泰勒展开式，将$R_n(x)$的前面所有项称为$P_n(x)$

即$f(x)=P_n(x)+R_n(x)\Rightarrow R_n(x)=f(x)-P_n(x)$

所以$R_n^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(x)-P_n^{(n+1)}(x)$

而$P_n(x)$只有 n 项，则$P_n^{(n+1)}(x)=0$

所以$R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$

所以$R_n^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)$

由于

$$\frac{R_n(x)}{S(x)}=\frac{R_n^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}$$

$$\Longrightarrow R_n(x)=\frac{R_n^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\cdot S(x)=\frac{R_n^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

代入即有

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

该式就是拉格朗日余项。