第 壹 章

微分中值定理

I. 简介

微分中值定理包括罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理三个定理，这三个定理都是微分学的基本定理，反映了可导函数在闭区间上某点的局部变化率的关系。

II. 罗尔中值定理

Rolle Mean Value Theorem

提出者：【法】米歇尔·罗尔

提出时间：1691 年

1. 内容：

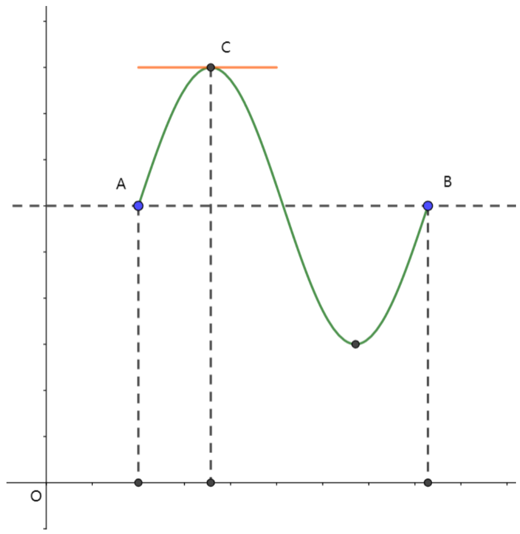
若函数 f(x)满足以下条件

（1） 在闭区间[a, b]上连续

（2） 在开区间(a, b)上可导

（3） f(a)=f(b)

则至少存在一个$\xi \in (a,b)$使得$f'(\xi) = 0$



2. 证明

由于 f(x)在[a, b]上连续

则其在[a, b]上存在最大值 M，最小值 m

（1） 若 M=m，则函数 f(x)在[a, b]上常值，即 f(x)在其区间内为常值函数，对于$\forall\xi \in (a,b)$都有$f'(\xi) = 0$，结论成立。

（2） 若 M>m，则由于 f(a)=f(b)，函数 f(x)在[a, b]上必须存在凹凸性，那么 M 和 m 至少有一个在(a, b)上某点ξ处取得，即ξ为极值点，故$f'(\xi) = 0$，证毕。

III. 拉格朗日中值定理

拉格朗日中值定理是罗尔中值定理的推广，同时也是柯西中值定理的特殊情况，是泰勒公式的弱形式（一阶展开）。

法国数学家拉格朗日于 1797 年在其著作《解析函数论》的第六章提出了该定理，并进行了初步证明，因此人们将该定理命名为拉格朗日中值定理。

中文名：拉格朗日中值定理

外文名：Lagrange Mean Value Theorem

别称：有限增量公式

提出者：约瑟夫·路易斯·拉格朗日【Joseph Louis Lagrange】

1. 定理

如果函数 f(x)满足

（1） 在闭区间[a, b]上连续

（2） 在开区间(a, b)上可导

那么在开区间(a, b)内至少有一点ξ $(a<\xi<b)$

使得等式$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$成立

2. 证明

可构造辅助函数

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

可得 g(x)在[a, b]上连续，在(a, b)上可导

而

$$g(a)=f(a)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=0$$

$$g(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=0$$

即 g(a)=g(b)

由罗尔中值定理

在(a, b)上必存在一个ξ使得$g'(\xi)=0$

而$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

则$g'(\xi)=\ f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

即$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

证毕。