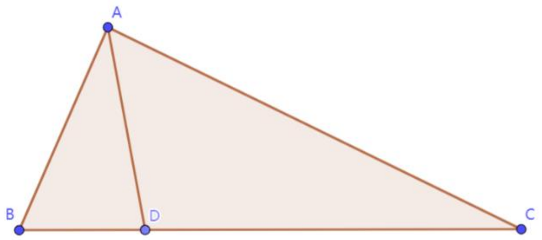
第 捌 章

张角定理

I. 张角定理

如图所示，

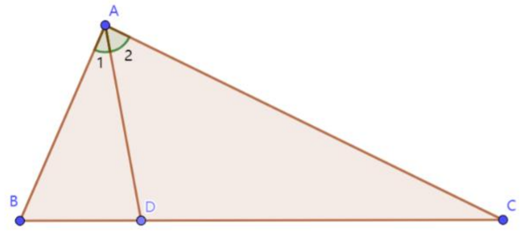


三角形 ABC 中，D 为 BC 边上任意一点，则必有

$$\frac{\sin\angle BAD}{AC}+\frac{\sin\angle CAD}{AB}=\frac{\sin\angle BAC}{AD}$$

提出者：朱谦，提出时间：公元 467 年

II. 定理证明



如图

设∠BAD = ∠1，∠CAD = ∠2

由正弦定理得

$\frac{AD}{\sin B}=\frac{BD}{\sin\angle 1}$ （1）

$\frac{AD}{\sin C}=\frac{CD}{\sin\angle 2}$ （2）

$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin(\angle 1+\angle 2)}$ （3）

$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin(\angle 1+\angle 2)}$ （4）

由（1）得$BD=\frac{AD\cdot\sin\angle 1}{\sin B}$ ，由（2）得$CD=\frac{AD\cdot\sin\angle 2}{\sin C}$

所以$BC=BD+CD=AD\cdot(\frac{\sin\angle 1}{\sin B}+\frac{\sin\angle 2}{\sin C})=\frac{AD\cdot(\sin\angle 1\cdot\sin C+\sin B\cdot\sin\angle 2)}{\sin B\cdot\sin C}$

由（3）得$AC=\frac{BC\cdot\sin B}{\sin(\angle 1+\angle 2)}$

所以$\frac{1}{AC}=\frac{sin(\angle 1+\angle 2)}{BC\cdot sinB}$

所以$\frac{sin\angle 1}{AC}=\frac{sin\angle 1\cdot sin(\angle 1+\angle 2)}{BC\cdot sinB}$ （5）

同理由（4）得$\frac{sin\angle 2}{AB}=\frac{sin\angle 2\cdot sin(\angle 1+\angle 2)}{BC\cdot sinC}$ （6）

（5）+（6）得

$$\frac{sin\angle 1}{AC}+\frac{sin\angle 2}{AB}=\frac{1}{BC}\cdot[\frac{sin\angle 1\cdot sin(\angle 1+\angle 2)}{sinB}+\frac{sin\angle 2\cdot sin(\angle 1+\angle 2)}{sinC}]$$

$$=\frac{1}{BC}\cdot\frac{sinC\cdot sin\angle 1\cdot sin(\angle 1+\angle 2)+sinB\cdot sin\angle 2\cdot sin(\angle 1+\angle 2)}{sinB\cdot sinC}$$

$$=\frac{1}{BC}\cdot\frac{sin(\angle 1+\angle 2)\cdot(sinC\cdot sin\angle 1+sinB\cdot sin\angle 2)}{sinB\cdot sinC}$$

又因为$BC=\frac{AD\cdot(sin\angle 1\cdot sinC+sinB\cdot sin\angle 2)}{sinB\cdot sinC}$

所以

$$\frac{1}{BC}\cdot\frac{\sin(\angle 1+\angle 2)\cdot(sinC\cdot sin\angle 1+sinB\cdot sin\angle 2)}{sinB\cdot sinC}$$

$$=\frac{sinB\cdot sinC}{AD\cdot(sin\angle 1\cdot sinC+sinB\cdot sin\angle 2)}\cdot\frac{\sin(\angle 1+\angle 2)\cdot(sinC\cdot sin\angle 1+sinB\cdot sin\angle 2)}{sinB\cdot sinC}$$

$$=\frac{sin(\angle 1+\angle 2)}{AD}$$

所以$\frac{sin\angle 1}{AC}+\frac{sin\angle 2}{AB}=\frac{sin(\angle 1+\angle 2)}{AD}$

即

$$\frac{sin\angle BAD}{AC}+\frac{sin\angle CAD}{AB}=\frac{sin\angle BAC}{AD}$$

证毕