第 柒 章

关于圆内接四边形的命题

I. 关于圆的内接四边形，容易想到的结论自然是第二卷第一章的托勒密定理，本节将会再次研究圆内接四边形理论，提出一些新的命题。

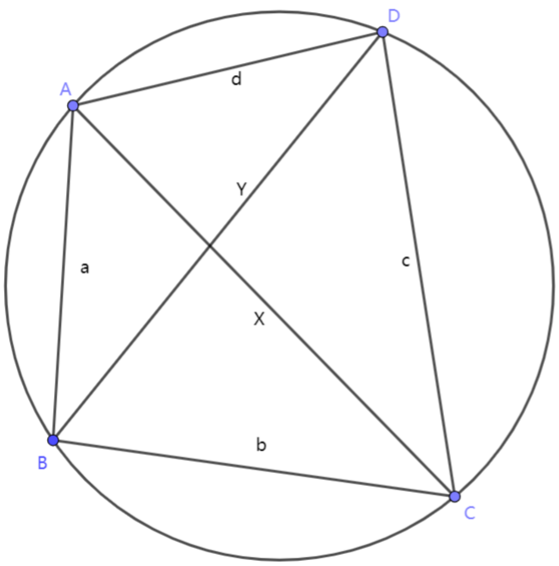
II. 由一个训练题展开的联想

设 a, b, c, d, x, y 为正实数，$\frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$，求证：$\frac{abx}{a+b+x}+\frac{cdx}{c+d+x}=\frac{ady}{a+d+y}+\frac{bcy}{b+c+y}$

本题是加拿大亚伯达（Alberta）大学 M.S.Klamkin 教授为 1990 年加拿大数学奥林匹克国家队提供的训练题，该题发表于 1991 年加拿大 CRUX 杂志第四期第 127 页，我们就其命题背景展开研究：

熟悉平面几何的人立刻可以联想到如图所示的托勒密定理：

xy=ac+bd（x=AC, y=BD）



由面积关系得$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}=S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}$

根据$S_{\triangle}=\frac{abc}{4R}$（R 为外接圆半径）

得到$\frac{abx}{4R}+\frac{cdx}{4R}=\frac{ady}{4R}+\frac{bcy}{4R}$

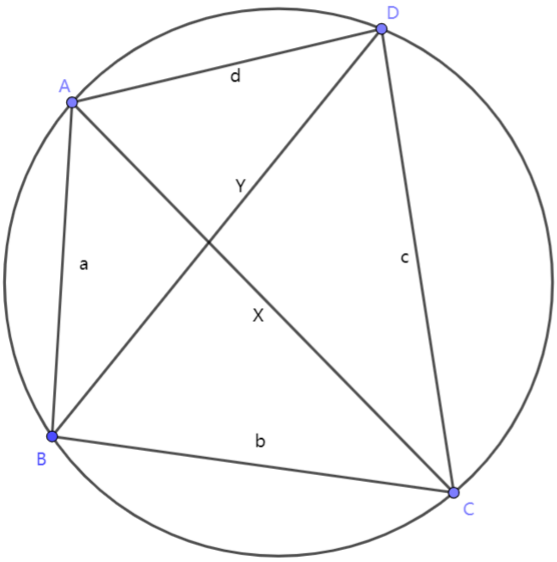
即 x(ab+cd)=y(ad+bc)

所以$\frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$

这就是我们得到的第一个命题。

III. 第二个命题

还是接上上一个命题的基础，我们再向下探索



我们设$\triangle ABD$，$\triangle BCA$，$\triangle CDB$，$\triangle DAC$内切圆半径为r_A, r_B, r_C, r_D

根据$S_{\triangle} = \frac{1}{2}(a+b+c)r$（r 为内切圆半径）

所以$\frac{abx}{4R} = S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}(a+b+x)\cdot r_B$

即$r_B = \frac{abx}{2R(a+b+x)}$

同理：$r_C = \frac{bcy}{2R(b+c+y)}$，$r_D = \frac{cdx}{2R(c+d+x)}$，$r_A = \frac{ady}{2R(a+d+y)}$

于是，前面训练题要求证的等式即化为：

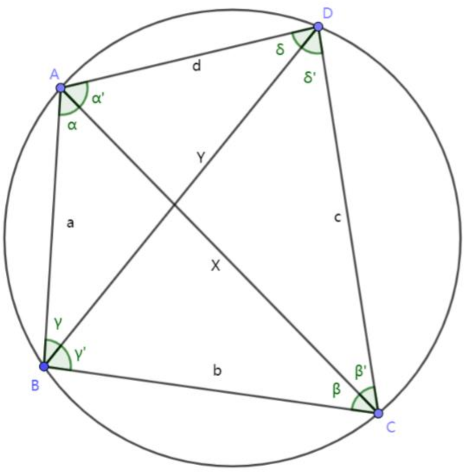
$$2R\cdot r_B + 2R\cdot r_D = 2R\cdot r_A + 2R\cdot r_C$$

$$即 r_B + r_D = r_A + r_C$$

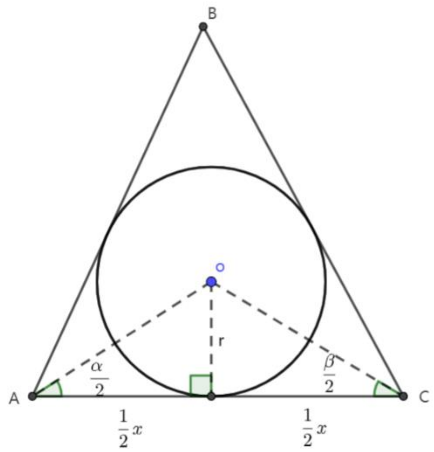
这便是我们需要证明的第二个命题

下面给出$r_B + r_D = r_A + r_C$的三角证明

如图



我们引入 8 个角$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\alpha',\beta',\gamma',\delta'$
则由同弧所对圆周角相等有：$\alpha=\delta',\alpha'=\gamma',\beta=\delta,\gamma=\beta'$
如图所示



所以$cot\frac{\alpha}{2}+cot\frac{\beta}{2}=\frac{x}{2r}+\frac{x}{2r}=\frac{x}{r}$

所以$x=r_B(cot\frac{\alpha}{2}+cot\frac{\beta}{2})$

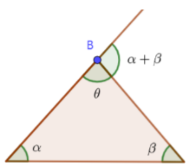
由正弦定理 x=2RsinB

则$r_B=\frac{2R\cdot sinB}{cot\frac{\alpha}{2}+cot\frac{\beta}{2}}$

由和差化积公式：$cot\alpha+cot\beta=\frac{sin(\alpha+\beta)}{sin\alpha\cdot sin\beta}$

化为

$$r_B=\frac{2R\cdot sinB\cdot sin\frac{\alpha}{2}\cdot sin\frac{\beta}{2}}{sin(\frac{\alpha+\beta}{2})}$$



如图

由于$\alpha+\beta+\theta=180°$

则$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\theta}{2}=90°$

则$cos\frac{\theta}{2}=sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

代入上式（θ*即为角B*）有

$$r_B=\frac{2R\cdot sinB\cdot sin\frac{\alpha}{2}\cdot sin\frac{\beta}{2}}{cos\frac{B}{2}}$$

而$sinB=2sin\frac{B}{2}cos\frac{B}{2}$，则

数神教会

$$r_B=\frac{2R\cdot(2sin\frac{B}{2}cos\frac{B}{2})\cdot sin\frac{\alpha}{2}\cdot sin\frac{\beta}{2}}{cos\frac{B}{2}}=4Rsin\frac{B}{2}\cdot sin\frac{\alpha}{2}\cdot sin\frac{\beta}{2}$$
$$=R\cdot(cosB+cos\alpha+cos\beta-1)$$

【这里利用了公式：$4sin(\frac{\pi-\alpha-\beta}{2})\cdot sin\frac{\alpha}{2}\cdot sin\frac{\beta}{2}=cos(\pi-\alpha-\beta)+cos\alpha+cos\beta-1$】

下面证明上面用到的公式：

$$cos(\pi-\alpha-\beta)+cos\alpha+cos\beta-1$$
$$=-\cos(\alpha+\beta)+cos\alpha+cos\beta-1$$
$$=(sin\alpha\cdot sin\beta-cos\alpha\cdot cos\beta)+cos\alpha+cos\beta-1$$
$$=2sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2sin\frac{\beta}{2}cos\frac{\beta}{2}-(1-2sin^2\frac{\alpha}{2})(1-2sin^2\frac{\beta}{2})+cos\alpha+cos\beta-1$$
$$=4sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}sin\frac{\beta}{2}cos\frac{\beta}{2}-(1-2sin^2\frac{\alpha}{2}-2sin^2\frac{\beta}{2}+4sin^2\frac{\alpha}{2}sin^2\frac{\beta}{2})+cos\alpha+cos\beta-1$$
$$=4sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}sin\frac{\beta}{2}cos\frac{\beta}{2}-1+2sin^2\frac{\alpha}{2}+2sin^2\frac{\beta}{2}-4sin^2\frac{\alpha}{2}sin^2\frac{\beta}{2}+1-2sin^2\frac{\alpha}{2}+1-2sin^2\frac{\beta}{2}-1$$
$$=4sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}sin\frac{\beta}{2}cos\frac{\beta}{2}-1+2sin^2\frac{\alpha}{2}+2sin^2\frac{\beta}{2}-4sin^2\frac{\alpha}{2}sin^2\frac{\beta}{2}+1-2sin^2\frac{\alpha}{2}+1-2sin^2\frac{\beta}{2}-1$$
$$=4sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}sin\frac{\beta}{2}cos\frac{\beta}{2}-4sin^2\frac{\alpha}{2}sin^2\frac{\beta}{2}$$
$$=4sin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\beta}{2}(cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}-sin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\beta}{2})$$
$$=4sin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\beta}{2}cos(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2})=4sin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\beta}{2}sin\frac{B}{2}$$

证毕

那么$r_B=R\cdot(cosB+cos\alpha+cos\beta-1)$

同理：

$$r_C=R(cosC+cos\gamma'+cos\delta'-1)$$
$$r_D=R(cosD+cos\alpha'+cos\beta-1)$$
$$r_A=R(cosA+cos\gamma+cos\delta-1)$$

所以

$$r_A+r_C=R(cosA+cosC+cos\gamma+cos\delta+cos\gamma'+cos\delta'-2)$$
$$r_B+r_D=R(cosB+cosD+cos\alpha+cos\beta+cos\alpha'+cos\beta'-2)$$

因为 A+C=B+D=180°，$\alpha=\delta',\alpha'=\gamma',\beta=\delta,\gamma=\beta'$

所以$cosA+cosC=cosB+cosD=0$

则$r_A+r_C=r_B+r_D$

证毕。

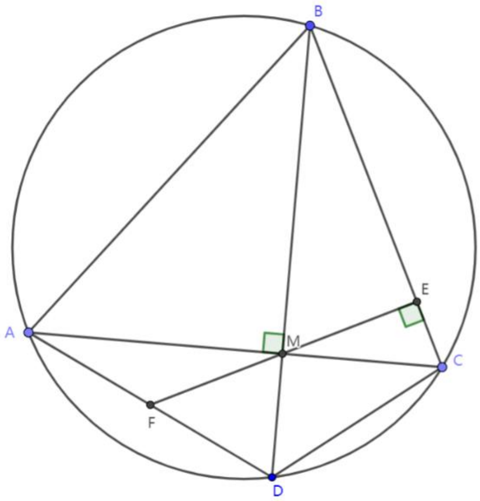
IV. 婆罗摩笈多定理

提出者：婆罗摩笈多

该定理又称：布拉美古塔定理

定理：若圆内接四边形的对角线相互垂直，则垂直于一边且过对角线交点的直线将平分对边。

如图，即求证 AF=DF



证明：

因为$AC \perp BD, ME \perp BC$

所以$\angle CBD = \angle CME$

因为$\angle CAD = \angle CBD$，$\angle CME = \angle AMF$

所以$\angle CAD = \angle CMF$

所以 AF=MF

因为$\angle AMD = 90°$，同时$\angle MDE + \angle MDA = 90°$

所以$\angle FMD = \angle FDM$

所以 MF=DF

即有 AF=DF

证毕