第 陆 章

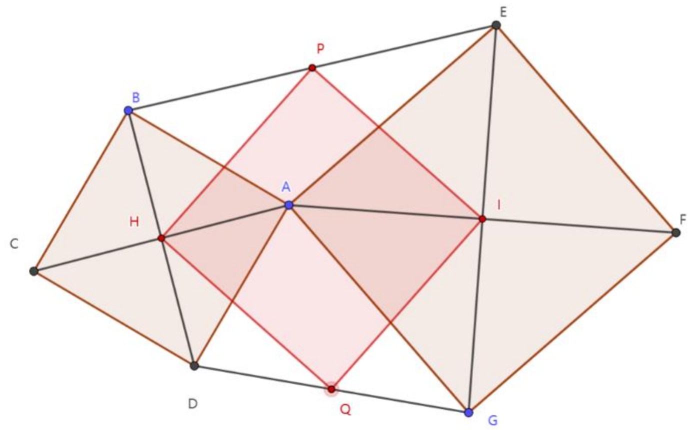
芬斯勒•哈德维格尔定理
和
凡•奥贝尔定理

I. 芬斯勒•哈德维格尔定理

1. 定义

任意两个其中一顶点重合的正方形，它们之间与此顶点相邻的两点之间连线段的中点，与两正方形的中心，四个点构成一个正方形。

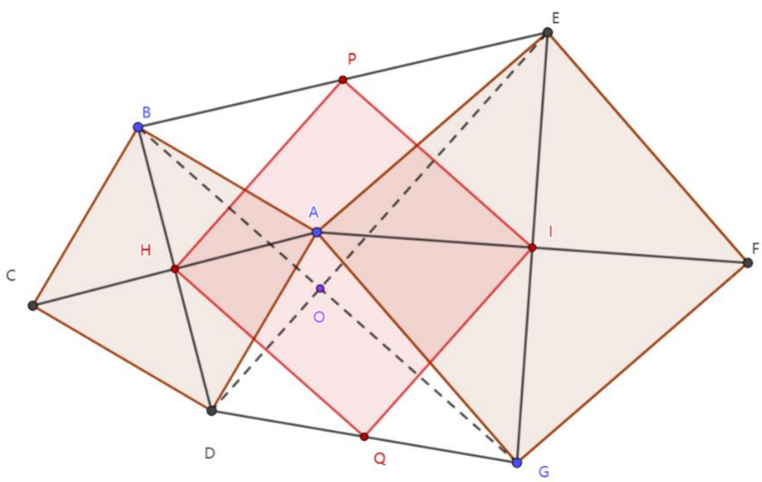
如图，



正方形 ABCD 和正方形 AEFG 公共 A 点，则 BE 中点 P，DG 中点 Q，正方形中心 H，I 构成的四边形 PQHI 为正方形。

2. 证明：连接 ED，BG 交于 O 点

如图



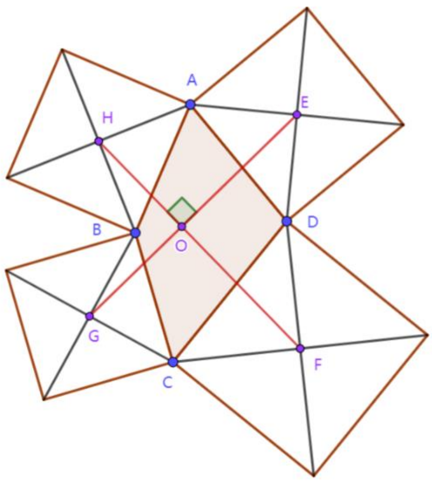
因为$\angle BAD=\angle EAG=90°$
所以$\angle BAG=\angle BAD+\angle GAD=\angle EAG+\angle GAD=\angle EAD$
又因为 AG=AE，AB=AD
所以$\triangle BAG\cong\triangle DAE$
所以 BG=DE
又因为 P 为 AE 中点，I 为 EG 中点，H 为 BD 中点，Q 为 DG 中点
所以$HQ=PI=\frac{1}{2}BG=\frac{1}{2}DE=HP=QI$
所以四边形 PHQI 为菱形
又因为$\triangle BAG\cong\triangle DAE$
所以$\angle BGA=\angle DEA$
又因为$\angle AEG+\angle AGE=90°$
所以$\angle OGE+\angle OEG=90°$
所以$\angle GOE=90°$
所以$\angle HPI=\angle PIQ=\angle IQH=\angle QHP=90°$
所以四边形 PHQI 为正方形
证毕

II. 凡•奥贝尔定理

1. 定义

任意四边形的四条边向外作正方形，其所对的正方形重心连接的线段相等且垂直。

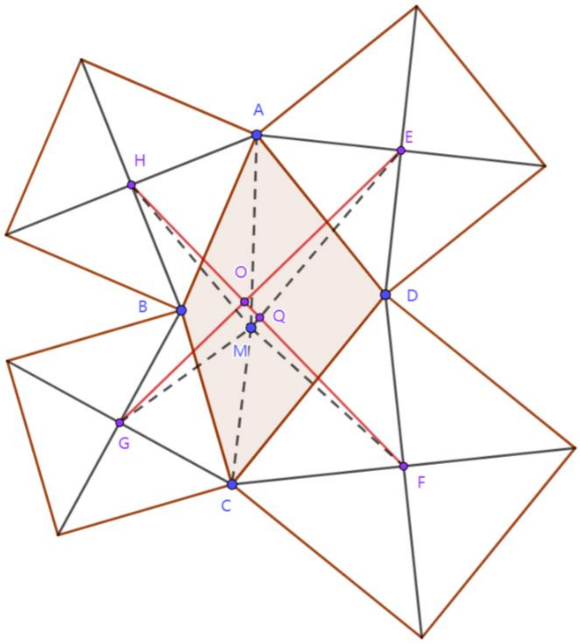
如图



即 HF 和 EG 垂直且相等

2. 证明：

连接 AC，取 AC 中点 M，连接 EM，FM，GM，HM，设 EM 交 HF 于 Q 点
如图



由芬斯勒·哈德维格尔定理可知 HM=GM，EM=FM，$\angle HMG=\angle EMF=90°$

所以$\triangle HMF \cong \triangle GME$

所以 HF=GE，$\angle MFH=\angle MEG$

又因为$\angle MQF=\angle MEG$

所以$\angle FMQ=\angle \mathrm{EOQ}=90°$

所以$HF\perp GE$

即 HF=GE 且$HF\perp GE$

证毕