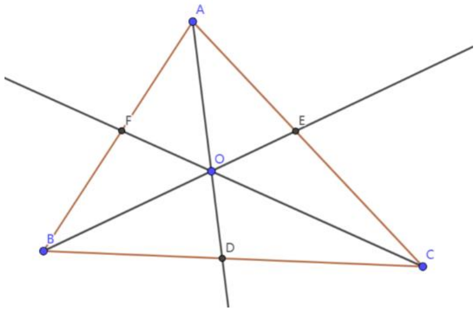
第 伍 章

塞瓦定理与角元塞瓦定理

I， 塞瓦定理

塞瓦定理是指在△ABC 内任取一点 O(如图)，延长 AO、BO、CO 分别交对边于 D、E、F，则

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$



塞瓦(Giovanni Ceva，1648~1734)意大利水利工程师，数学家。

塞瓦定理载于塞瓦于 1678 年发表的《直线论》一书，也有书中说塞瓦定理是塞瓦重大发现。

塞瓦定理记忆方法：三顶点选一个作为起点，定一方向，绕一圈，三组比例相乘为一。

中文名：塞瓦定理

外文名：Ceva’s theorem

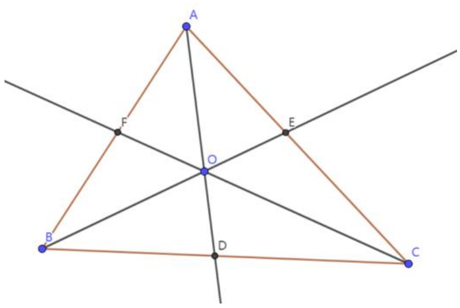
表达式：(BD/DC)×(CE/EA)×(AF/FB)=1

提出者：乔瓦尼·塞瓦

提出时间：1678 年

II， 定理证明

如图所示：



在完全四边形 DOAFBCD 中由梅涅劳斯定理有：

$\frac{DO}{OA}\cdot\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BC}{CD}=1$（1 式）

在完全四边形 DOAECBD 中由梅涅劳斯定理：

$$\frac{DO}{OA}\cdot\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CB}{BD}=1$$

分子分母交换一下变为：

$\frac{OA}{DO}\cdot\frac{EC}{AE}\cdot\frac{BD}{CB}=1$（2 式）

1 式与 2 式相乘有：

$$\frac{DO}{OA}\cdot\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BC}{CD}\cdot\frac{OA}{DO}\cdot\frac{EC}{AE}\cdot\frac{BD}{CB}=1$$

将相同的项消去有：

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{EC}{AE}=1$$

即证。

III， 塞瓦定理逆定理

如果三角形 ABC 中，D，E，F 分别为边 BC，AC，AB 上的点，若满足：

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

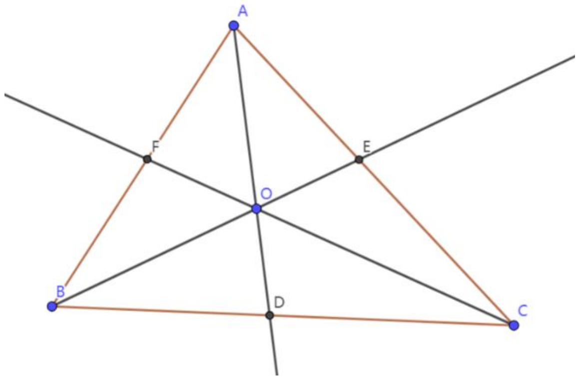
则 AD，BE，CF 交于同一点 O。

IV， 角元塞瓦定理

角元塞瓦定理与塞瓦定理相似，只是由边的比例转化成了角的比例。

在△ABC 内任取一点 O(如图)，延长 AO、BO、CO 分别交对边于 D、E、F，则

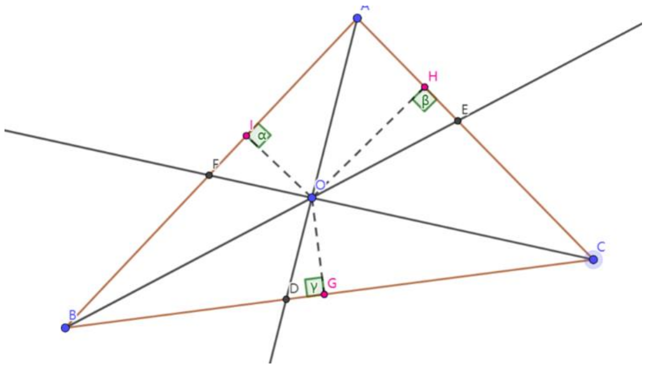
$$\frac{\sin\angle OAB}{\sin\angle OBA}\cdot\frac{\sin\angle OBC}{\sin\angle OCB}\cdot\frac{\sin\angle OCA}{\sin\angle OAC}=1$$



V， 定理证明

我们过 O 点做三条边的垂线，与三条边分别交于 G，H，I

如图：



我们不难得到：$sin\angle OAB=\frac{OI}{OA}$，$sin\angle OBA=\frac{OI}{OB}$，$sin\angle OBC=\frac{OG}{OB}$，$sin\angle OCB=\frac{OG}{OC}$，$sin\angle OCA=\frac{OH}{OC}$，$sin\angle OAC=\frac{OH}{OA}$。

代入式子$\frac{sin\angle OAB}{sin\angle OBA}\cdot\frac{sin\angle OBC}{sin\angle OCB}\cdot\frac{sin\angle OCA}{sin\angle OAC}$有：

$$\frac{sin\angle OAB}{sin\angle OBA}\cdot\frac{sin\angle OBC}{sin\angle OCB}\cdot\frac{sin\angle OCA}{sin\angle OAC}=\frac{\frac{OI}{OA}}{\frac{OI}{OB}}\cdot\frac{\frac{OG}{OB}}{\frac{OG}{OC}}\cdot\frac{\frac{OH}{OC}}{\frac{OH}{OA}}=1$$

即证。

VI， 角元塞瓦定理逆定理

三角形 ABC 中，以 A，B，C 三个点向三角形内部做三条射线交 BC，AC，AB 于 D，E，F 三点，若满足：

$$\frac{sin\angle DAB}{sin\angle EBA}\cdot\frac{sin\angle EBC}{sin\angle FCB}\cdot\frac{sin\angle FCA}{sin\angle DAC}=1$$

则这三条射线交于一点 O。