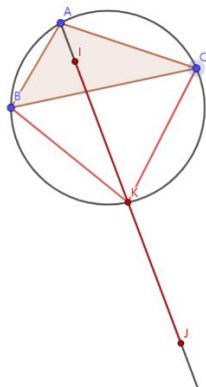


第 肆 章

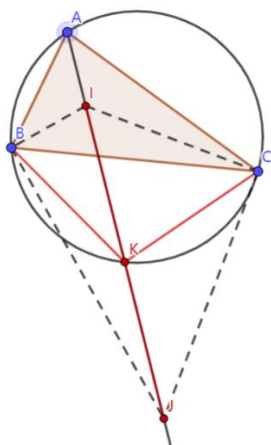
鸡爪定理

I. 鸡爪定理

如图，设 $\triangle ABC$ 的内心为 I ， $\angle A$ 所对应的旁心为 J ， AI 的延长线交三角形外接圆于 K ，则 $KI=KJ=KB=KC$ ，其中 KI, KJ, KB, KC 组成的图形，形似鸡爪。



II. 证明：连接 BJ, CJ, BI, CI



因为 I 为 $\triangle ABC$ 的内心

所以 $\angle ABI = \angle IBC, \angle ACI = \angle ICB, \angle BAK = \angle CAK$

因为 J 为三角形 ABC 旁心

所以 $\angle JBC = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2}$

所以 $\angle IBJ = \angle IBC + \angle JBC = \frac{\angle ABC}{2} + \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} = 90^\circ$

同理有 $\angle ICJ = 90^\circ$

则 I, B, C, J 四点共圆

则 IJ 为直径

又 $\angle KBI = \angle IBC + \angle KBC \quad \angle IBC = \angle IBA \quad \angle KBC = \angle KAC = \angle KAB$

则 $\angle KBI = \angle ABI + \angle KAB = \angle BIK$

所以 $BK=IK$

同理得 $IK=CK$

又 $\angle FBJ = \angle ICJ = 90^\circ$

则 $KI=KJ=KB=KC$

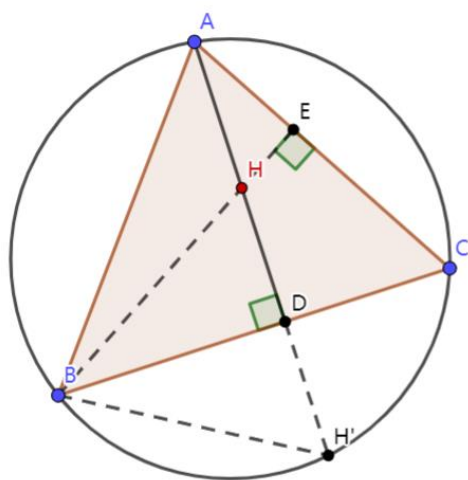
证毕

III. 鸭爪定理

任意三角形垂心关于边的对称点在三角形外接圆上

证明:

如图所示: 作高 BE , 连接 BH'



因为 $\angle EBC = 90^\circ - \angle C = \angle H'AC = \angle H'BC$

所以 $\text{Rt}\triangle BDH \cong \text{Rt}\triangle BDH'$

所以 $HD=DH'$

所以 H, H' 关于 BC 对称

证毕。