第 叁 章

牛顿定理

I. 牛顿定理

特指平面几何中的牛顿定理，共三个。

提出者：艾萨克·牛顿

II. 牛顿定理 1

完全四边形三条对角线的中点共线，该线称为“牛顿线”。

由于上一节（第二卷第二章）已经证明过，在此不再证明，详见第二卷第二章。

III. 牛顿定理 2

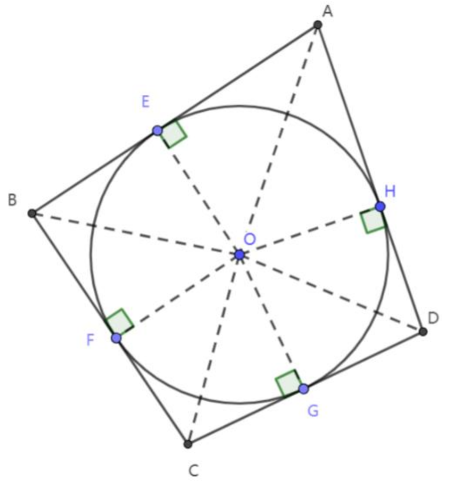
圆外切四边形的两条对角线的中点及该圆的圆心，三点共线。

如图

要证明此定理，我们需要知道：

圆外切四边形两组对边之和相等。

证明：如图所示



由切线长定理有

AE=AH，BE=BF，CF=CG，DG=DH

所以 AB+CD=AE+BE+CG+DG=AH+BF+CF+DH=BF+CF+AH+DH=BC+AD

证毕。

在图示基础上，连接 AO，BO，CO，DO，EO，FO，GO，HO

所以 $EO \perp AB$，$FO \perp BC$，$GO \perp CD$，$HO \perp AD$，且其均为半径，即 EO=FO=GO=HO

所以

$$S_{\triangle AOD}+S_{\triangle BOC}=\frac{AD+OH}{2}+\frac{BC+OF}{2}=\frac{(AD+BC)\cdot r}{2}=\frac{(AB+CD)\cdot r}{2}$$

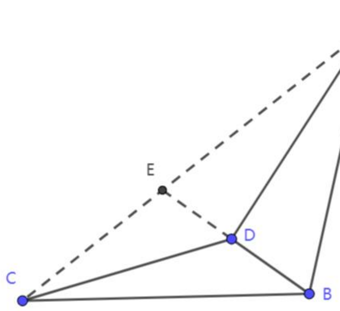
$$=\frac{AB+EO}{2}+\frac{CD+OG}{2}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle COD}$$

则$S_{\triangle AOD}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}S_{四边形ABCD}$

这个结论对下面的证明有帮助。

在牛顿定理中，证明三点共线的方法有多种，此定理中用到了其中一种：

如图



已知$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle CBD}$，E 为 AC 上一点

若使 E，B，D 共线，则就要使 E 在直线 BD 上

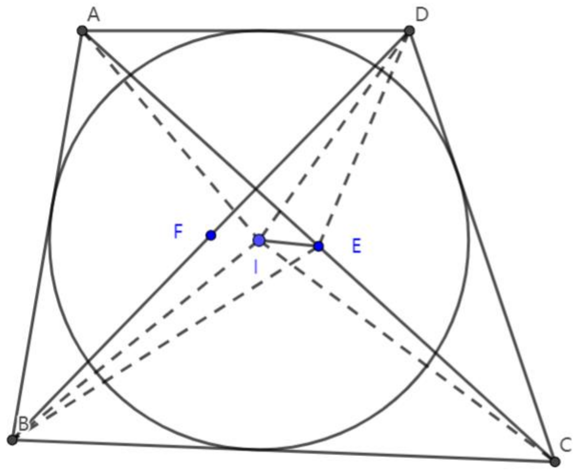
因此需要$S_{\triangle AED}=S_{\triangle CED}$

当 E 为 AC 中点时，则$S_{\triangle AED}=S_{\triangle CED}$，此时三点共线

拓展：若$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CBD}}=k$，则$\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle CED}}=k$，$\frac{AE}{CE}=k=\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{CB}$

证明牛顿定理 2：

如图



已知 E，F 为对角线中点，I 为圆心

由图知

$$S_{\triangle BIE}=S_{\triangle BIC}+S_{\triangle CEI}-S_{\triangle BCE}$$
$$S_{\triangle DEI}=S_{\triangle ADE}+S_{\triangle AEI}-S_{\triangle AID}$$

由上面结论知$S_{\triangle BIC}+S_{\triangle AID}=\frac{1}{2}S_{四边形ABCD}$

又因为 E 为 AC 中点

所以$S_{\triangle DEC}+S_{\triangle BEC}=\frac{1}{2}S_{四边形ABCD}$

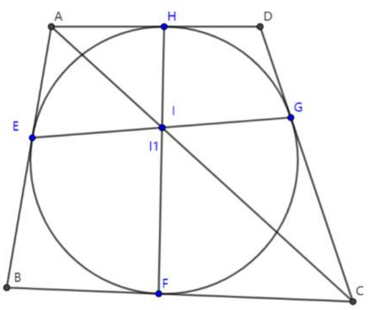
所以$S_{\triangle ADE}+S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}S_{四边形ABCD}$（因为 E 为 AC 中点，则$S_{\triangle DEC}=S_{\triangle ADE}$）

所以$S_{\triangle BIC}+S_{\triangle AID}=\frac{1}{2}S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ADE}+S_{\triangle BEC}$

所以$S_{\triangle BIC}-S_{\triangle BCE}=S_{\triangle ADE}-S_{\triangle AID}$
因为 E 为 AC 中点
所以$S_{\triangle CIE}=S_{\triangle AIE}$
所以$S_{\triangle BIC}+S_{\triangle CEI}-S_{\triangle BCE}=S_{\triangle ADE}+S_{\triangle AIE}-S_{\triangle AID}$
即$S_{\triangle BIE}=S_{\triangle DIE}$
由上可证 F 在直线 IE 上。即 F，I，E 共线
证毕

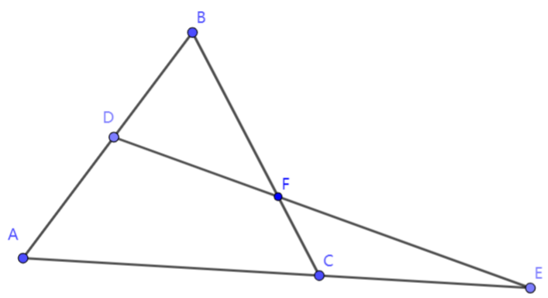
IV. 牛顿定理 3

圆的外切四边形的对角线的交点和以切点为顶点的四边形的对角线交点重合。



如图

要证明此定理，我们需要一个一级结论：
如图



等腰三角形 ABC 中，AB=AC，D，E 为 AB，AC 上的点，连接 DE 交 BC 于 F，求证：$\frac{DF}{EF}=\frac{DB}{CE}$

证明：由梅涅劳斯定理得$\frac{DF}{EF}\cdot\frac{EC}{AC}\cdot\frac{AB}{BD}=1$

即$\frac{DF}{EF}\cdot\frac{EC}{BD}\cdot\frac{AB}{AC}=1$

又因为 AB=AC，所以$\frac{AB}{AC}=1$

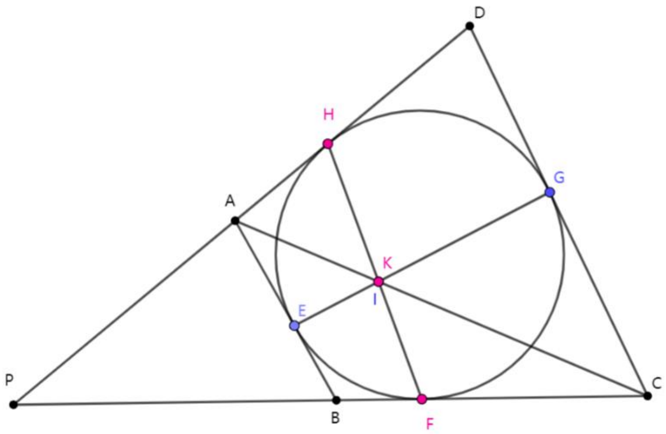
所以$\frac{DF}{EF}\cdot\frac{EC}{BD}=1$

即$\frac{DF}{EF}=\frac{BD}{EC}$

证毕

证明牛顿定理 3：

如图



延长 DA，CB 交于 P 点，则由切线长定理知 PH=PF

所以$\angle AHF=\angle BFH$

设 HF 交 AC 于 K

EG 交 AC 于 I

由上面的一级结论知

$$\frac{AK}{CK}=\frac{AH}{CF}$$

由切线长定理知 AH=AE，CF=CG

所以$\frac{AK}{CK}=\frac{AH}{CF}=\frac{AE}{CG}$

同上，我们延长 AB，CD，可以得到$\angle AEG=\angle DGE$

所以

$$\frac{AI}{CI}=\frac{AK}{CK}$$

所以 I，K 重合，证毕