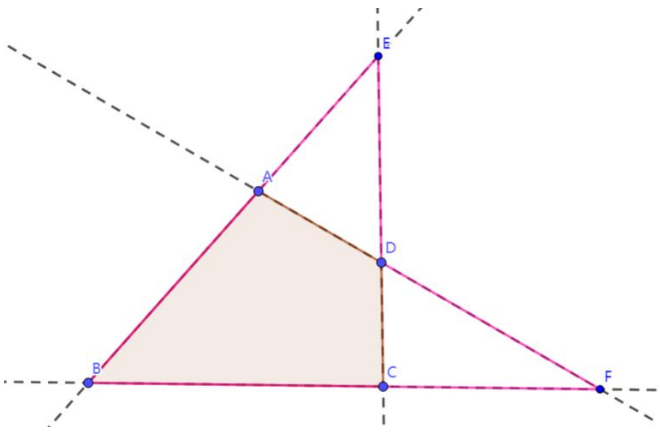
第 贰 章

完全四边形理论

I. 完全四边形定义

完全四边形是指将对边互不平行的四边形的四条边都向两边延长，对边的延长线之间会有两个交点，这六个点围成的图形我们称之为完全四边形。

如图所示



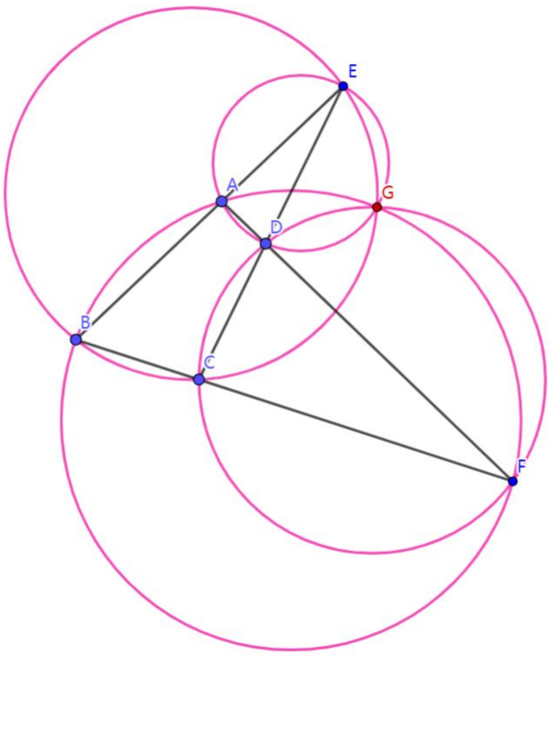
由图可知，完全四边形中有四个三角形（$\triangle AED$，$\triangle DCF$，$\triangle ABF$，$\triangle BEC$）

II. 完全四边形的性质及定理

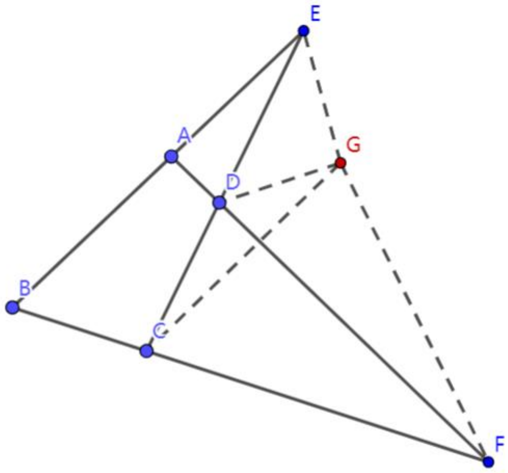
（1） 密克尔点

完全四边形的四个三角形的外接圆均交于一点，该点称为“密克尔点”。

如图

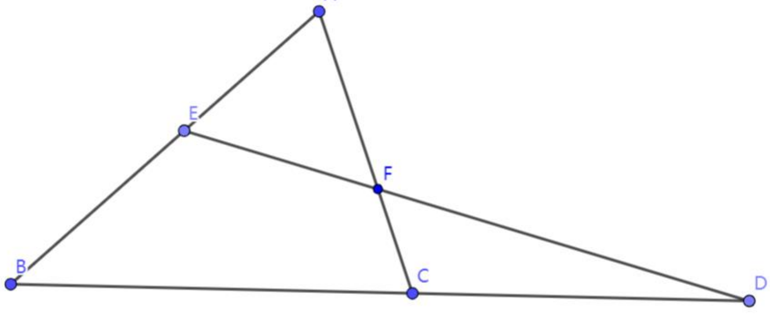


证明：
如图所示



我们把圆省略掉，设$\triangle AED$和$\triangle DCF$的外接圆交于 G 点
我们只要证明其他两三角形外接圆也过 G 点即可
即证 A，B，F，G 共圆和 B，C，G，E 共圆
连接 GD，GC，GE，GF
所以四边形 AEGD 和四边形 CFGD 均为圆内接四边形
所以$\angle GDF=\angle GCF$，$\angle GDA+\angle GEA=180°$
所以$\angle GDA=180°-\angle GDF=180°-\angle GCF=\angle BCG$
所以$\angle GCB+\angle GEA=180°$
所以 B，C，G，E 四点共圆
同理得 A，B，G，F 四点共圆
故 G 为密克尔点，证毕。

（2） 梅涅劳斯定理

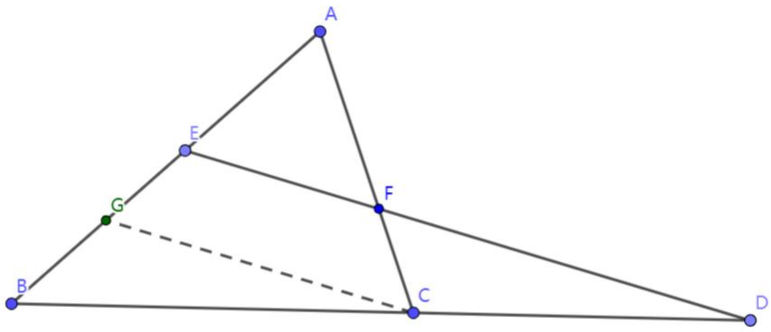


如图，在任意三角形 ABC 中，在 AB 上任取一点 E，在 BC 延长线上任取一点 D，连接 DE 交 AC 于 F，则必有

$$\frac{CF}{AF}\cdot\frac{AE}{BE}\cdot\frac{BD}{CD}=1$$

$$\frac{FA}{AC}\cdot\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DE}{EF}=1$$

证明：如图



过 C 做 CG//ED 交 AB 于 G

所以$\frac{CF}{FA}=\frac{GE}{EA}$，$\frac{BD}{CD}=\frac{BE}{GE}$

所以

$$\frac{CF}{AF}\cdot\frac{AE}{BE}\cdot\frac{BD}{CD}$$
$$=\frac{GE}{AE}\cdot\frac{AE}{BE}\cdot\frac{BE}{GE}=1$$
$$\text{另一式同理}$$

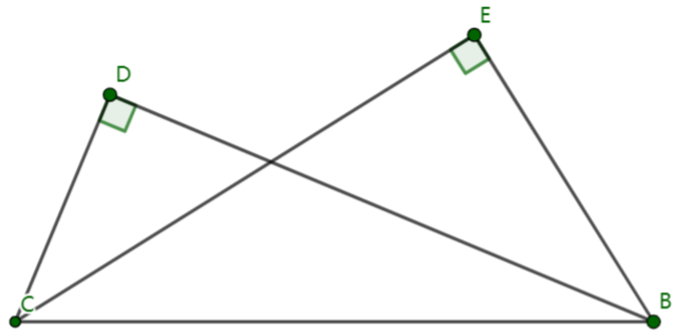
证毕。

（3） 西姆松线

1. 西姆松定理：过三角形外接圆上异于三角形顶点的任意一点（称为基点）作三角形三条边的垂线，则三个垂足共线，称为三角形的西姆松线

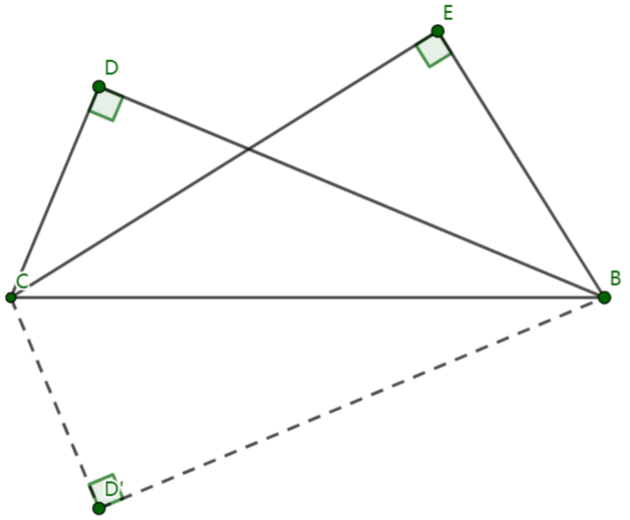
要证明此定理，我们先证明如下铺垫：

如图



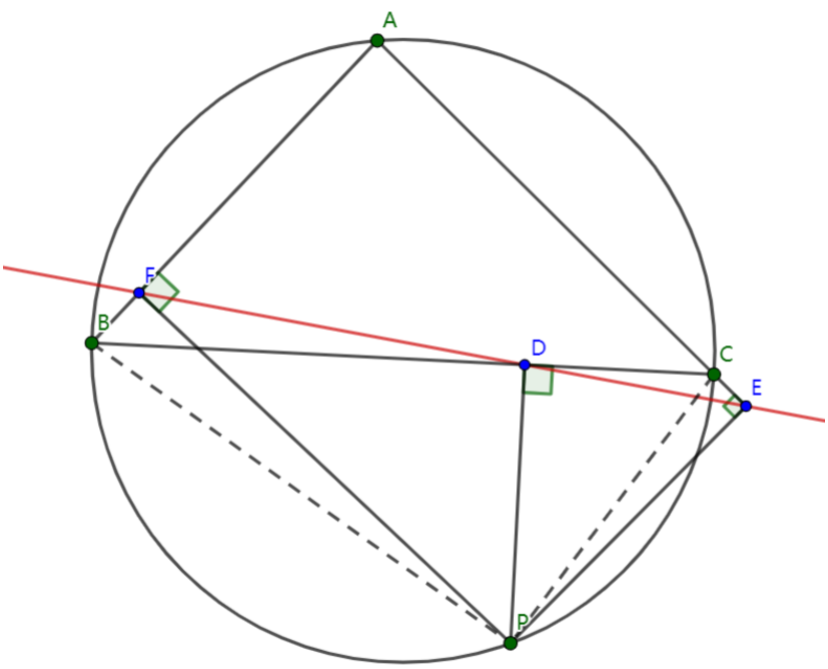
三角形 BCD 和三角形 BCE 均为直角三角形且斜边均为 BC，求证 B，C，D，E 四点共圆。

证明：我们将三角形 BCD 沿 BC 翻折如图



则$\angle D = \angle D' = 90°$
则$\angle E + \angle D' = 180°$
故 B，C，D’，E 四点共圆
BC 为直径
又$\angle D = 90°$
则 D 在圆上
故 B，C，D，E 四点共圆
证毕。

下面证明西姆松定理：
如图



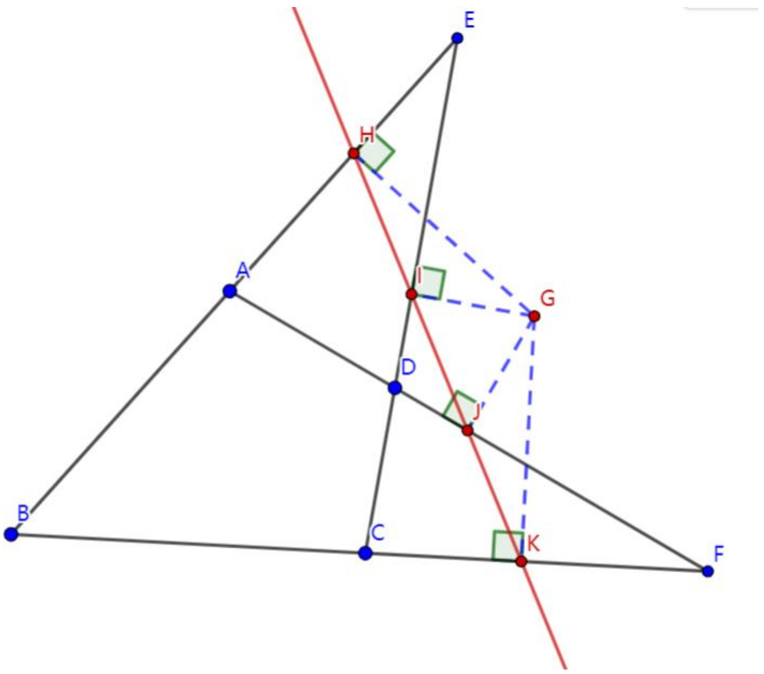
连接 BP，CP

观察三角形 PBF 和三角形 PBD
由上面的结论知 F，B，P，D 四点共圆
所以$\angle FBP+\angle FDP=180°$
又因为 A，B，P，C 共圆
所以$\angle FBP(即\angle ABP)+\angle ACP=180°$
又因为$\angle ACP+\angle ECP=180°$
所以$\angle FBP=\angle ECP$
又$\angle CDP+\angle CEP=180°$
所以 C，P，D，E 共圆
所以 D，C 为圆上两点，PE 为弦
则$\angle PDE=\angle ECP$
所以$\angle PDE=\angle FBP$
所以$\angle PDE+\angle FDP=180°$
所以 F，D，E 三点共线
证毕。

2. 完全四边形的西姆松线

完全四边形的四个三角形中，以密克尔点为基点的四条西姆松线重合，称为完全四边形的西姆松线。

如图



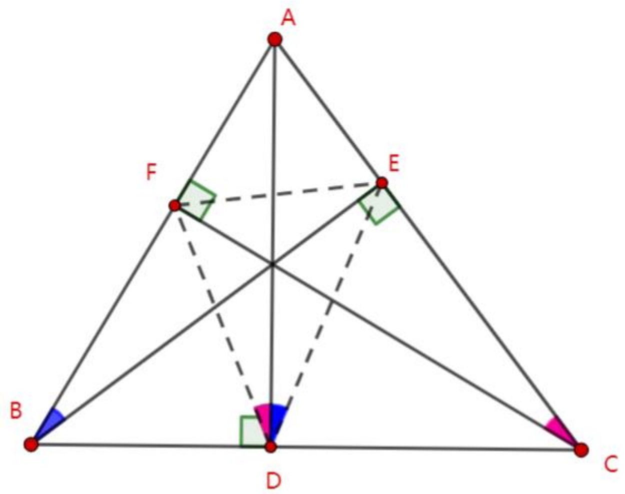
证明：可知一共有四个垂足
由西姆松定理知 H，I，J 三点共线，I，J，K 三点共线
则有 H，I，J，K 四点共线，即证。

（4） 垂心线

1. 三角形的垂心

定义：三角形三条高交于一点，此点称为三角形的垂心。

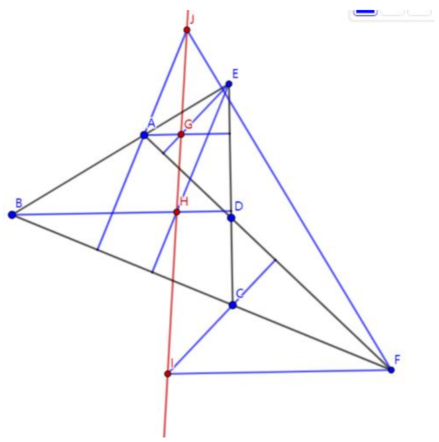
证明：如图



连接 ED，DF，EF
由上面的西姆松定理可知
因为$\angle AEB=\angle ADB=90°$
所以 A，E，D，B 四点共圆
所以图中两个蓝色的角（$\angle ABE$，$\angle ADE$）为同弦（AE）所对的圆周角
则两个蓝色的角相等
同理两个粉色的角相等
又因为$\angle AEB=\angle AFC=90°$，$\angle BAE=\angle CAF$
所以$Rt\triangle ABE\sim Rt\triangle ACF$
所以$\angle ABE(蓝)=\angle ACF(粉)$
所以$\angle ADF=\angle ADE$
即 AD 平分$\angle FDE$
同理得 CF 平分$\angle EFD$，BE 平分$\angle FED$
所以 AD，CF，BE 的交点为三角形 DEF 的内心
故三角形 ABC 三条高交于一点
证毕。

2. 完全四边形的垂心线

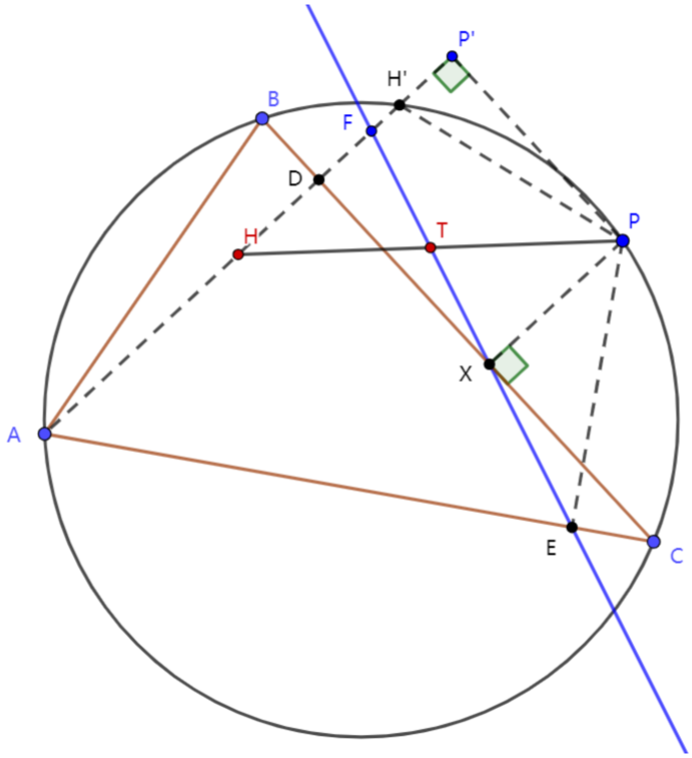
定理：完全四边形的四个三角形的垂心共线，称为完全四边形的垂心线。
如图



要证明此定理，我们需要证明一个弱化定理：

三角形外接圆上任意一点（基点）作的西姆松线平分基点与三角形垂心的连线。

证明：如图所示



P 为基点，XE 为西姆松线，H 为三角形 ABC 垂心，我们需要求证 HT=TP

过 A 做 AD⊥ BC于 D 并延长交 TE 于 F，交$\overset{\frown}{PB}$于 H’

过 P 做 PX⊥ BC于 X

因为 AD 必过 H（AD 为高）由鸭爪定理（详见第二卷第四章）

知 HD=H’D

连接 PE，PC，PH’

所以$\angle PEC=90°$（西姆松线）

所以 P，X，E，C 共圆

所以$\angle PXE+\angle ECP=180°$

又因为 AH’//PX（因为$AH'\perp$ BC，$PX\perp$ BC）

所以$\angle H'PX+\angle PH'F=180°$

又因为$\angle PH'A+\angle ECP=180°$（共圆）

所以$\angle H'PX=\angle ECP$

又因为$\angle PXE+\angle PXT=180°$

所以$\angle FXP=\angle PXT=180°-\angle PXE=\angle ECP=\angle H'PX$

即$\angle FXP=\angle H'PX$

而 FH’//PX

则四边形 FXPH’为等腰梯形

过 P 作$PP'\perp$ AH’ 于 P’

知四边形 DXPP’为矩形

则 P’H’=DF

所以 HF=HD+DF=H’D+DF=H’D+H’P’=P’F=PX

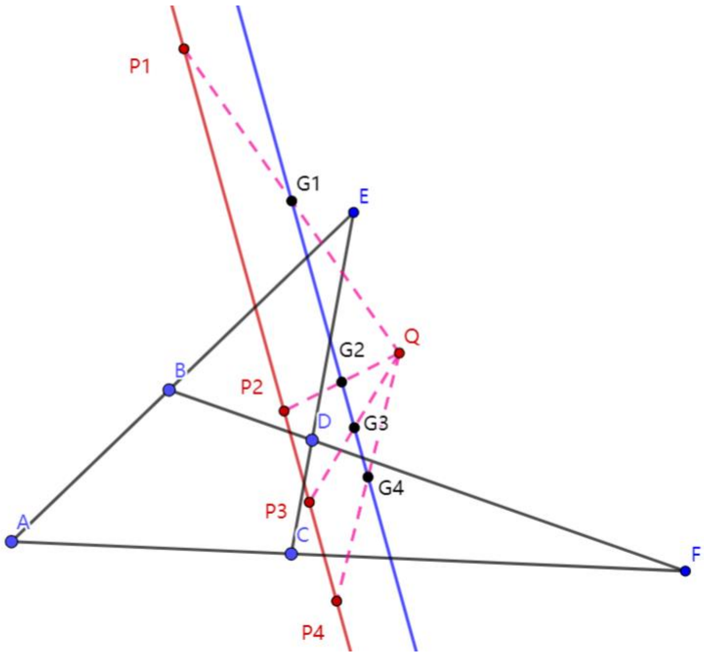
所以$\triangle HFT \cong \triangle PXT$

所以 HT=PT

证毕。

下面证明垂心线：

如图



Q 为密克尔点，蓝色线为完全四边形的西姆松线，P1，P2,P3,P4 为四个垂心。

连接P_1Q, P_2Q, P_3Q, P_4Q交西姆松线于G_1, G_2, G_3, G_4

由上面的定理知

$$QG_1 = P_1G \qquad QG_2 = P_2G$$
$$QG_3 = P_3G \qquad QG_4 = P_4G$$

又G_1, G_2, G_3, G_4四点共线，则 P1，P2,P3,P4 四点共线

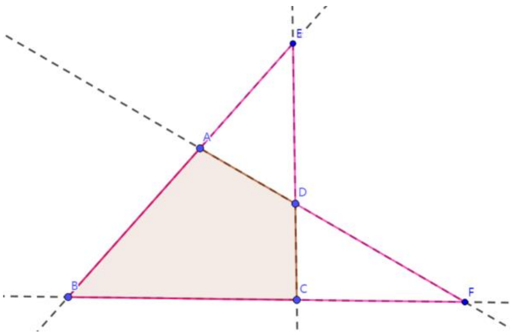
即证。

通过此图可知：

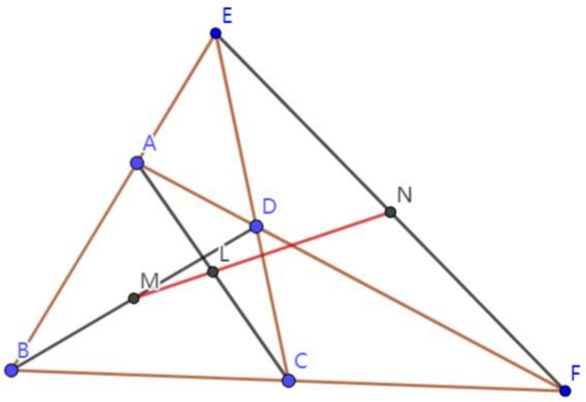
完全四边形的垂心线与西姆松线平行（或重合）

（5） 牛顿线

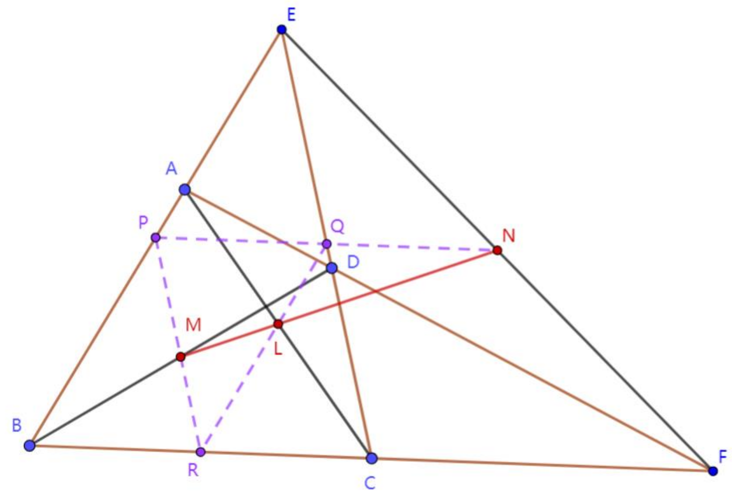
在完全四边形中，也存在对角线，如图



AC，BD，EF 即为它的对角线。完全四边形有三条对角线。
牛顿定理：
牛顿定理有三个，本节研究完全四边形，因此只证明其中一个(牛顿定理 1)，有关牛顿定理，我们会在下一节研究。
完全四边形三条对角线中点共线，该线称为“牛顿线”。
如图，M，L，N 共线。



证明：如图



取 BE 中点 P，EC 中点 Q，BC 中点 R
连接 PN，PR，QR
所以 P，Q，N 共线（中位线）
因为 EQ=CQ，BR=CR，AL=CL
所以 Q，R，L 共线
又因为 BP=EP，BM=DM，BR=CR
所以 P，M，R 共线
由上得

$$\frac{QL}{LR}=\frac{EA}{AB} \quad \frac{RM}{MP}=\frac{CD}{DE} \quad \frac{PN}{NQ}=\frac{BF}{CF}$$

相乘得

$$\frac{QL}{LR}\cdot\frac{RM}{MP}\cdot\frac{PN}{NQ}=\frac{EA}{AB}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{BF}{CF}$$

由梅涅劳斯定理得

$$\frac{EA}{AB}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{BF}{CF}=1$$

则

$$\frac{QL}{LR}\cdot\frac{RM}{MP}\cdot\frac{PN}{NQ}=1$$

由梅涅劳斯定理逆定理得 L，M，N 三点共线

证毕。

III. 图论

图论中有完全图的概念，代表 n 个顶点而且每两个顶点之间恰好有一条边的无向图。所以 n 个顶点的完全图含有$\frac{n(n-1)}{2}$条边。通常我们记 n 个顶点的完全图为K_n。而K_4即为完全四边形。