第 拾 伍 章

帕斯卡定理

I，　帕斯卡定理

帕斯卡定理指圆锥曲线内接六边形（包括退化的六边形和折叠六边形）其三对边的交点共线，与布列安桑定理对偶，是帕普斯定理的推广。定理约于公元 1639 年为法国数学家布莱士·帕斯卡*(Blaise Pascal)*所发现，被称为帕斯卡定理，是射影几何中的一个重要定理。

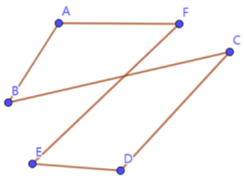
II，　退化六边形和折叠六边形

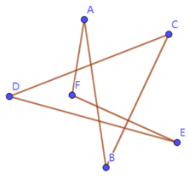
退化六边形指的是六边形中有三个或三个以上的点共线或两个或两个以上的点重合，这样的六边形（或者说它已经不足六条边了）叫做退化六边形。

任何一个多边形都可以理解成一个退化的比它边更多的多边形。

折叠六边形（或称折六边形）是指六边形存在某两条或多条边相交，但是首尾仍然相连的六边形

如图





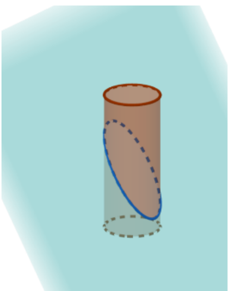
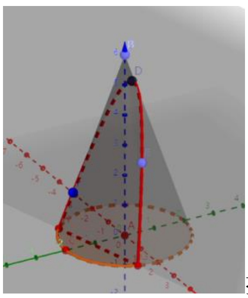
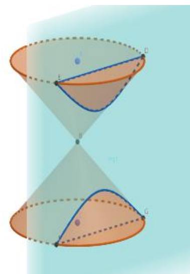
这些都称为折叠六边形。

折叠多边形的性质：对多边形进行折叠不改变其广义性质。即折叠后多边形仍然满足一维规律（比如平行相交，线段长度，内角和等），但是像面积这样的二维规则将不能继承。

III，　射影几何原理（伸缩变换原理）

我们已经知道，圆锥曲线可以经过圆锥（或圆柱）射影转化为圆（我们称之为“伸缩变换”）

如图：


椭圆；

抛物线；

双曲线。

因此，对于任何圆锥曲线我们都能找到一个圆锥（或圆柱）来对应它们，也就是说，我们可以沿圆锥侧面将圆锥曲线射影（或伸缩变换）到圆锥（或圆柱）的底面，此时圆锥曲线也就变成了圆。而由于伸缩变换不改变直线的性质，因此我们可以将帕

斯卡定理由圆锥曲线转化为圆。

IV， 定理证明

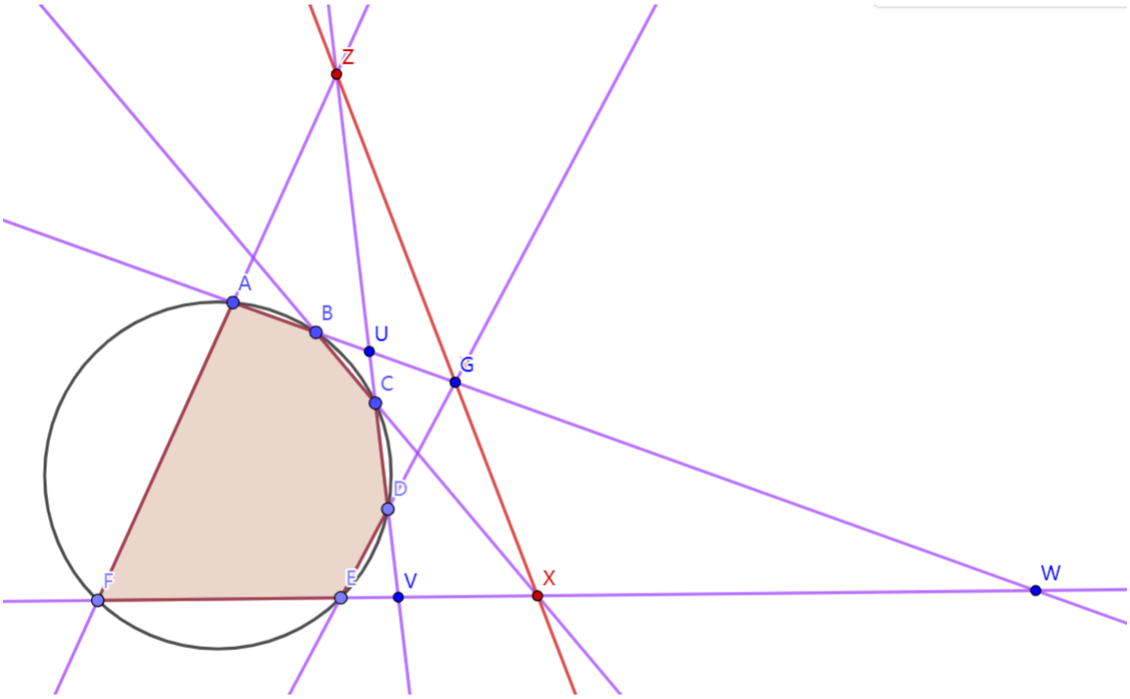
由于伸缩变换关系，定理转化为：

圆内接六边形（包括退化的六边形和折叠六边形）其三对边的交点共线。

我们只要证明它成立即可。

证明：

如图所示：



我们先设 ZG，GX 为两条线（不重合）。

在完全四边形 XCBUWVX 中由梅涅劳斯定理（详见第二卷第二章）：

$$\frac{UC}{CV}\cdot\frac{VX}{XW}\cdot\frac{WB}{BU}=1$$

在完全四边形 VDUGWEV 中由梅涅劳斯定理：

$\frac{VD}{DU}\cdot\frac{UG}{GW}\cdot\frac{WE}{EV}=1$，倒过来变成

$$\frac{WG}{GU}\cdot\frac{UD}{DV}\cdot\frac{VE}{EW}=1$$

三角形 UVW 与 FA 相交，由梅涅劳斯定理：

$$\frac{UZ}{ZV}\cdot\frac{VF}{FW}\cdot\frac{WA}{AU}=1$$

将三式分组有：

$$\frac{VX}{XW}\cdot\left(\frac{UC}{CV}\cdot\frac{WB}{BU}\right)=1$$

$$\frac{WG}{GU}\cdot\left(\frac{UD}{DV}\cdot\frac{VE}{EW}\right)=1$$

$$\frac{UZ}{ZV}\cdot\left(\frac{VF}{FW}\cdot\frac{WA}{AU}\right)=1$$

三式相乘有：

$$\frac{VX}{XW}\cdot\frac{WG}{GU}\cdot\frac{UZ}{ZV}\cdot\left(\frac{UC}{CV}\cdot\frac{WB}{BU}\cdot\frac{UD}{DV}\cdot\frac{VE}{EW}\cdot\frac{VF}{FW}\cdot\frac{WA}{AU}\right)=1$$

将括号中的各项分组有：

$$\frac{VX}{XW}\cdot\frac{WG}{GU}\cdot\frac{UZ}{ZV}\cdot\left(\frac{UC}{CV}\cdot\frac{WB}{BU}\cdot\frac{UD}{DV}\cdot\frac{VE}{EW}\cdot\frac{VF}{FW}\cdot\frac{WA}{AU}\right)=1$$

由割线定理：

WB • WA=EW • FW；UC • UD=BU • AU；VE • VF=CV • DV。

则括号中的式子值为 1

故有：

$$\frac{VX}{XW}\cdot\frac{WG}{GU}\cdot\frac{UZ}{ZV}=1$$

由梅涅劳斯逆定理，X，G，Z 三点共线。

证毕。

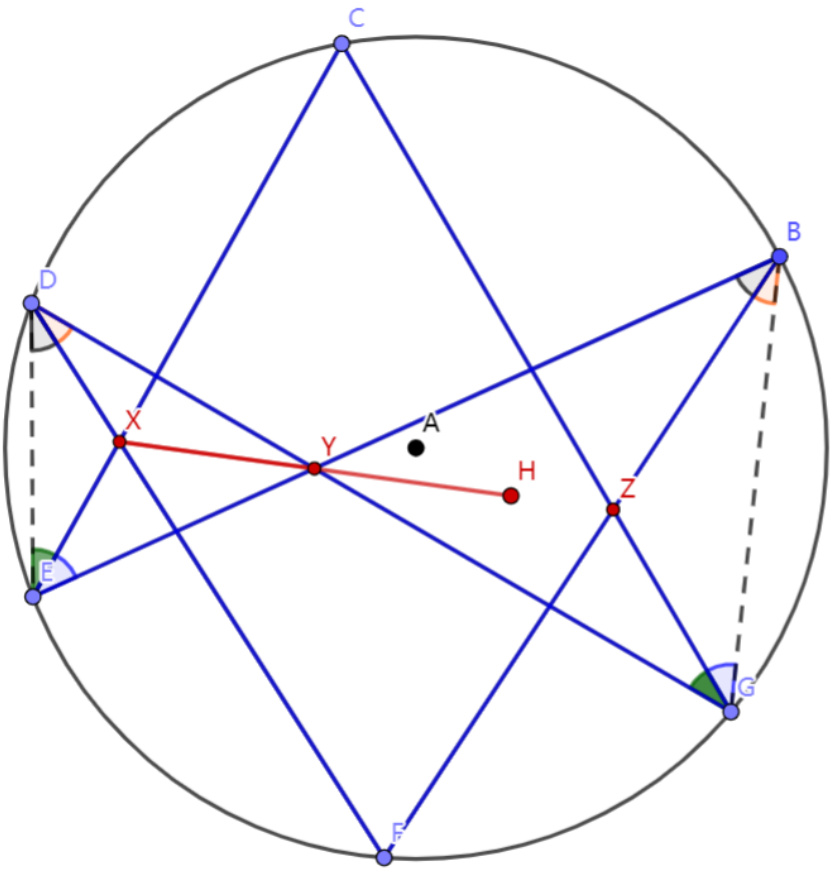
V，　　利用折叠证明帕斯卡定理

我们已经知道，折叠不会改变图形的一维性质，那么我们如果考虑折六边形的帕斯卡定理，将其证明后即可推广至一般六边形。

我们先用伸缩变换将圆锥曲线转化为圆，再将三个交点通过折叠转移至圆内。

证明：

如图：



在折六边形 BFDGCEB 中，其一组对边相隔一个顶点（例如 FD 和 CE 中通过 B，G 连接），因此三组对边分别为：FD 和 CE，DG 和 EB，BF 和 GC，其交点分别为 X，Y，Z。
连接并延长 XY 至 H，我们只需证明 YH 过 Z 点，
由同弧所对的圆周角相等，我们有∠DEC=∠DGC（图中绿色），∠CEB = ∠CGB（图中蓝色），∠FDG = ∠FBG（图中橙色），∠EDF = ∠EBF（图中黑色）。
由对顶角有∠DYX = ∠GYH，∠EYX = ∠BYH。
三角形 DEY 中由角元塞瓦定理（详见第二卷第五章）：

$$\frac{\sin\angle XDE}{\sin\angle DEX}\cdot\frac{\sin\angle XEY}{\sin\angle EYX}\cdot\frac{\sin\angle XYD}{\sin\angle YDX}=1$$

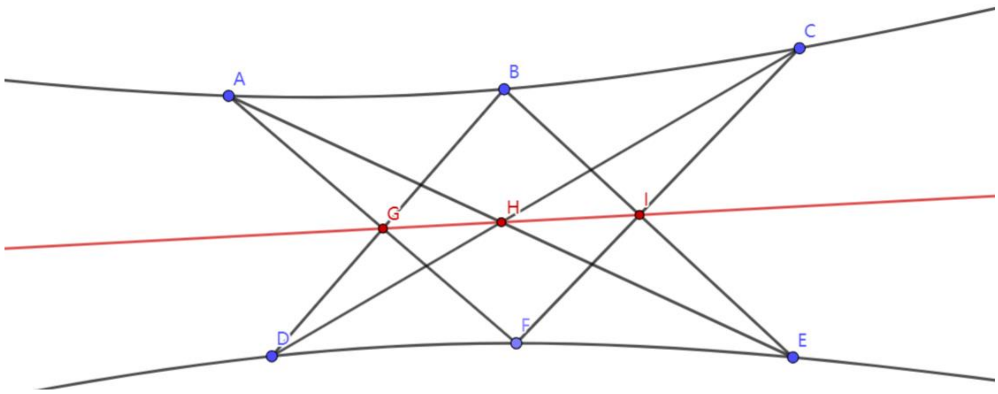
将同角替换得：

$$\frac{\sin\angle YBZ}{\sin\angle ZGY}\cdot\frac{\sin\angle BGZ}{\sin\angle BYH}\cdot\frac{\sin\angle GYH}{\sin\angle ZBG}=1$$

三角形 BYG 中由角元塞瓦定理逆定理：YH 过 Z 点。
证毕。

VI， 帕斯卡定理与帕普斯定理的关系

在上一章节所录的帕普斯定理可以由帕斯卡定理推出，其推广过程为：
由于帕斯卡定理对于任何圆锥曲线及任何六边形都成立，因此我们取双曲线上的折叠六边形，并且使双曲线的离心率无限增大，即为使双曲线无限接近于一条直线。
那么帕斯卡定理就转变为了帕普斯定理。
如图：



转变为下图：