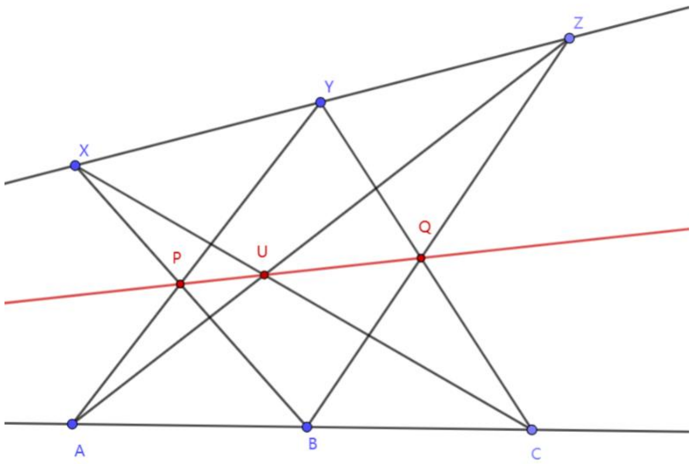
第 拾 肆 章

帕普斯定理

I. 帕普斯定理

如图



在直线l_1，l_2上有 A，B，C，X，Y，Z 六点，交于 P，Q，U 三点，则 P，Q，U 三点共线。

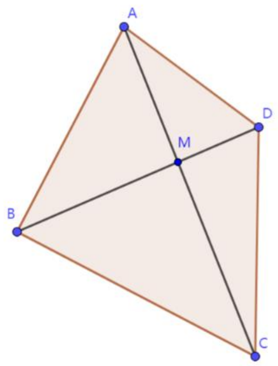
提出者：帕普斯【Pappus[古希腊]】

II. 证明

证明帕普斯定理时，我们需要用到一个初级定理：共边比例定理

共边比例定理：

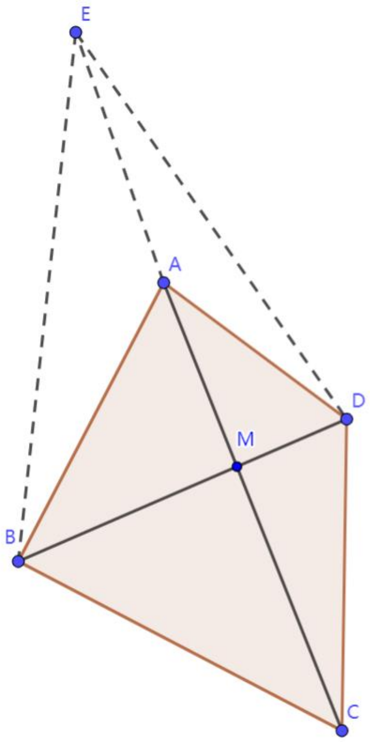
在凸四边形 ABCD 中，对角线 AC，BD 交于 M



则在其中一定存在有$\frac{DM}{BM} = \frac{S_{\triangle DAC}}{S_{\triangle BAC}}$

证明：延长 MA 至 E 使得 AE=CM，连接 BE，DE

如图



因为 CM=AE

所以$S_{\triangle CMB}=S_{\triangle EAB}$，$S_{\triangle CMD}=S_{\triangle DEA}$【等底同高】

所以$S_{\triangle BME}=S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle DME}=S_{\triangle ADC}$

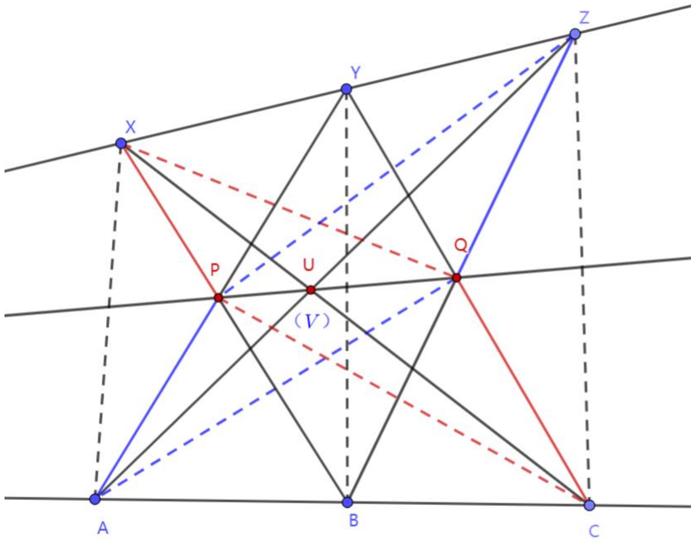
因为三角形 BME 与三角形 DME 高相等

所以$\frac{S_{\triangle BME}}{S_{\triangle DME}}=\frac{BM}{MD}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}}$

证毕。

下面证明帕普斯定理：

连接 PQ 交 XC 于 U，交 AZ 于 V，那么我们只需证明 U，V 重合即可



由共边比例定理

$$\frac{PU}{QU}=\frac{S_{\triangle XPC}}{S_{\triangle XQC}},\quad \frac{PV}{QV}=\frac{S_{\triangle PZA}}{S_{\triangle QZA}}$$

$$S_{\triangle XPC}=S_{\triangle XBC}\cdot\frac{XP}{XP+PB}=S_{\triangle XBC}\cdot\frac{S_{\triangle XYA}}{S_{四边形ABYX}}=\frac{S_{\triangle XBC}\cdot S_{\triangle XYA}}{S_{四边形ABYX}}$$

同理得

$$S_{\triangle XQC}=\frac{S_{\triangle XYC}\cdot S_{\triangle ZBC}}{S_{四边形YBCZ}}$$

$$S_{\triangle PZA}=\frac{S_{\triangle AYZ}\cdot S_{\triangle XAB}}{S_{四边形ABYX}}$$

$$S_{\triangle QZA}=\frac{S_{\triangle ZAB}\cdot S_{\triangle YZC}}{S_{四边形YBCZ}}$$

所以

$$\frac{PU}{QU}\div\frac{PV}{QV}=\frac{S_{\triangle XPC}}{S_{\triangle XQC}}\div\frac{S_{\triangle PZA}}{S_{\triangle QZA}}=\frac{\frac{S_{\triangle XBC}\cdot S_{\triangle XYA}}{S_{四边形ABYX}}}{\frac{S_{\triangle XYC}\cdot S_{\triangle ZBC}}{S_{四边形YBCZ}}}\cdot\frac{\frac{S_{\triangle ZAB}\cdot S_{\triangle YZC}}{S_{四边形YBCZ}}}{\frac{S_{\triangle AYZ}\cdot S_{\triangle XAB}}{S_{四边形ABYX}}}$$

$$=\frac{S_{\triangle XBC}\cdot S_{\triangle XYA}}{S_{\triangle XYC}\cdot S_{\triangle ZBC}}\cdot\frac{S_{\triangle ZAB}\cdot S_{\triangle YZC}}{S_{\triangle AYZ}\cdot S_{\triangle XAB}}$$

$$=\frac{S_{\triangle XBC}}{S_{\triangle XAB}}\cdot\frac{S_{\triangle XYA}}{S_{\triangle AYZ}}\cdot\frac{S_{\triangle ZAB}}{S_{\triangle ZBC}}\cdot\frac{S_{\triangle YZC}}{S_{\triangle XYC}}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{XY}}{\mathrm{YZ}}\cdot\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{YZ}}{\mathrm{XY}}=1$$

$$所以\frac{PU}{QU}=\frac{PV}{QV}$$

则 U，V 重合，故 P，Q，U 共线

证毕。