第 拾 叁 章

三角形十定点理论

I.　七个常规点

三角形拥有十个特殊点，其中重心，内心，外心，垂心，三个旁心这七个点是我们利用最多的点，统称“七常规点”，而其他三个点分别为 Gergonne 点，Nagel 点，Lemoine 点，这十个点在任何三角形中都存在，统称“三角形十定点”。

前面的“七常规点”证明比较简单，在此不证明，我们主要研究后面三个特殊点。

II.　葛尔刚点

中文名：热尔岗点，葛尔刚点

外文名：Gergonne point

提出者：热尔岗【Gergonne，法国】

定理：

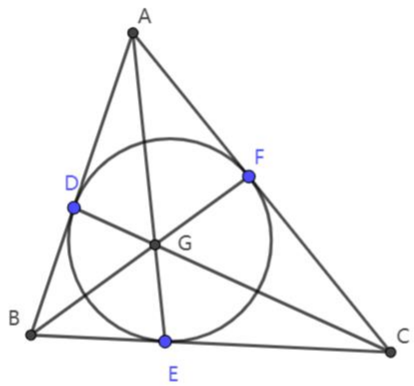
分别连接三角形一个顶点及对边上的内切圆或旁切圆切点的三条直线共点。

这样的点共有 4 个，统称“葛尔刚点”

证明：

（1）　内切圆情况

如图



三角形 ABC 内切圆 AB，BC，AC 分别于 D，E，F

则 AE，BF，CD 三线共点

证明：由于该圆内切于三角形

由切线长定理：AD=AF，BD=BE，EC=CF

即

$$\frac{AD}{AF}=1,\quad \frac{BE}{BD}=1,\quad \frac{CF}{CE}=1$$

三式相乘得

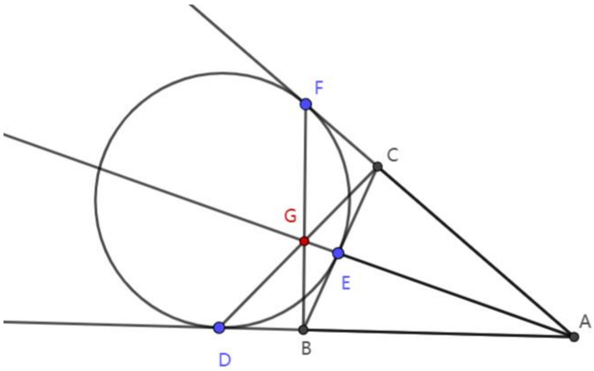
$$\frac{AD}{AF}\cdot\frac{BE}{BD}\cdot\frac{CF}{CE}=1$$

由塞瓦定理逆定理得 AE，BF，CD 三线共点

证毕

（2） 旁切圆情况

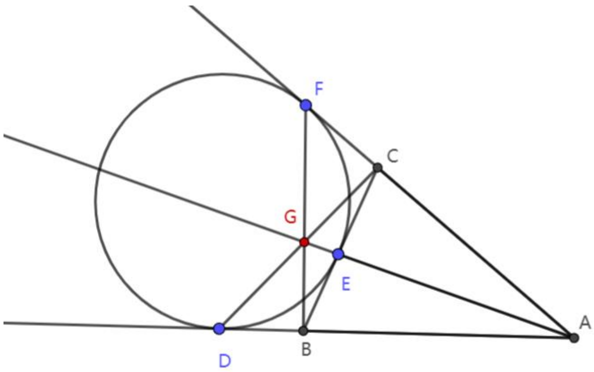
如图



三角形 ABC 的旁切圆交 AB，BC，AC 分别于 D，E，F，那么有 AE，BF，CD 三线共点。

证明：

如图



假设 BF，CD 交于 G 点，若要证明 G 为葛尔刚点，那么需要证明 AE 过 G 点

即证明 A，E，G 共线

在完全四边形 BGFCADB 中由梅涅劳斯定理

$$\frac{BG}{GF}\cdot\frac{CF}{AC}\cdot\frac{AD}{DB}=1$$

由于该旁切圆旁切于三角形 ABC

所以 CF=CE，BD=BE，AD=AF

代入上比例式

$$\frac{BG}{GF}\cdot\frac{CE}{AC}\cdot\frac{AF}{BE}=1$$

整理得

$$\frac{CE}{BE}\cdot\frac{BG}{GF}\cdot\frac{AF}{AC}=1$$

由梅涅劳斯定理逆定理得 A，G，E 共线

证毕。

III. 奈格尔点（Nagel 点）

中文名：奈格尔点

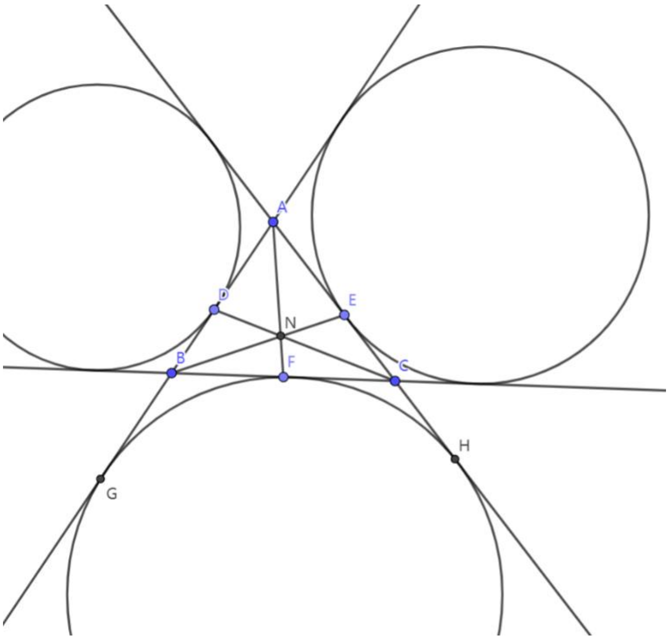
外文名：Nagel point

提出者：Christian Heinrich von Nagel【德国数学家】

提出时间：1836 年

定理：

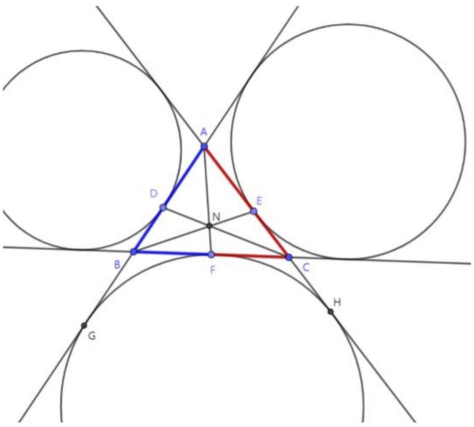
三角形 ABC 中的三个旁切圆切三角形 ABC 三边于 D，E，F，那么有 AF，BE，CD 三线共点。



该点被称为 Nagel 点，俗称“界心”

证明：

如图



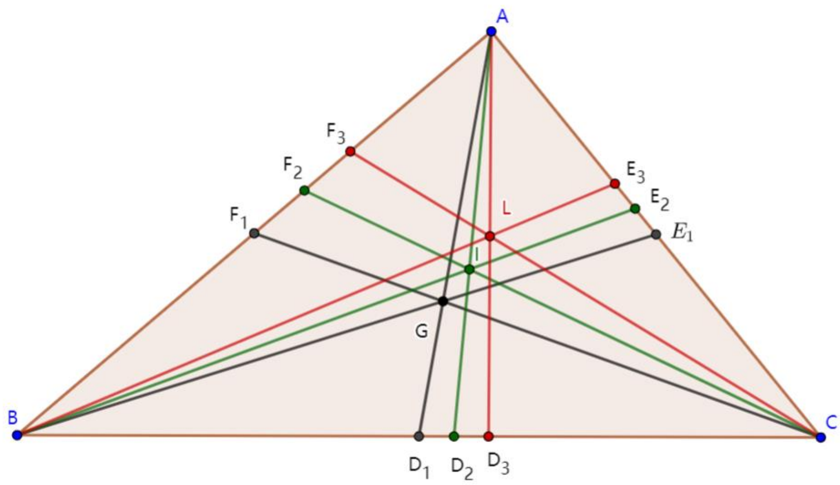
由切线长定理：AG=AH，BG=BF，CH=CF
因此 AB+BG=AG=AH=AC+CH
即 AB+BF=AC+CF
即折线 ABF（蓝色）=折线 ACF（红色）
设三角形 ABC 周长为 2S
则折线 ABF=折线 ACF=S
设 A，B，C 对边为 a ,b ,c
即 BC=a ,AC=b ,AB=c
所以 BF=S-AB=S-c
CF=S-AC=S-b
同理：折线 DAC=折线 DBC，折线 EAB=折线 ECB
所以:
DA=S-AC=S-b ,EA=S-AB=S-c
DB=S-BC=S-a ,EC=S-BC=S-a
所以

$$\frac{DA}{DB}\cdot\frac{BF}{CF}\cdot\frac{CE}{AE}=\frac{S-b}{S-a}\cdot\frac{S-c}{S-b}\cdot\frac{S-a}{S-c}=1$$

由塞瓦定理逆定理得 AF，BE，CD 三线共点
证毕。

IV. 莱莫恩点

中文名：莱莫恩点
外文名：Lemoine point
提出者：莱莫恩（Lemoine）
定理：
莱莫恩点的作法非常复杂，如下：



（1） 作三角形 ABC，并作其三条中线AD_1,BE_1,CF_1（图中黑线）
（2） 作其三条角平分线AD_2,BE_2,CF_2（图中绿线）
（3） 作三条中线关于对应角平分线的轴对称线AD_3,BE_3,CF_3（图中红线）
则三条红线必会交于一点 L，该点称为莱莫恩点，俗称“类似重心”

证明：

由角平分线可知$\angle BAD_2=\angle CAD_2$

另外，根据轴对称变换可知$\angle D_1AD_2=\angle D_3AD_2$

所以$\angle BAD_2+\angle D_3AD_2=\angle CAD_2+\angle D_1AD_2$

即$\angle BAD_2-\angle D_1AD_2=\angle CAD_2-\angle D_3AD_2$

即$\angle BAD_3=\angle CAD_1$ ， $\angle BAD_1=\angle CAD_3$

而

$$\frac{BD_3}{D_3C}=\frac{BD_3}{D_1C}\cdot\frac{D_1C}{D_3C}$$

$$=\frac{S_{\triangle ABD_3}}{S_{\triangle ACD_1}}\cdot\frac{D_1C}{D_3C}\text{【同高】}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AD_3\cdot sin\angle BAD_3}{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AD_1\cdot sin\angle CAD_1}\cdot\frac{D_1C}{D_3C}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AD_3\cdot sin\angle BAD_3}{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AD_1\cdot sin\angle CAD_1}\cdot\frac{BD_1}{D_3C}\text{（由于}D_1\text{为}BC\text{中点，则}BD_1=CD_1\text{）}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AD_3\cdot sin\angle BAD_3}{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AD_1\cdot sin\angle CAD_1}\cdot\frac{S_{\triangle ABD_1}}{S_{\triangle ACD_3}}\text{【同高】}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AD_3\cdot sin\angle BAD_3}{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AD_1\cdot sin\angle CAD_1}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD_1\cdot sin\angle BAD_1}{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AD_3\cdot sin\angle CAD_3}$$

由于$\angle BAD_3=\angle CAD_1$，$\angle BAD_1=\angle CAD_3$

所以$sin\angle BAD_3=sin\angle CAD_1$，$sin\angle BAD_1=sin\angle CAD_3$

所以上式为

$$\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AD_3\cdot sin\angle BAD_3}{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AD_1\cdot sin\angle CAD_1}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD_1\cdot sin\angle BAD_1}{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AD_3\cdot sin\angle CAD_3}$$

$$=\frac{AB\cdot AD_3}{AC\cdot AD_1}\cdot\frac{AB\cdot AD_1}{AC\cdot AD_3}$$

$$=\frac{AB^2}{AC^2}$$

则有$\frac{BD_3}{D_3C}=\frac{AB^2}{AC^2}$

同理有$\frac{CE_3}{E_3A}=\frac{BC^2}{AB^2}$ ； $\frac{AF_3}{F_3B}=\frac{AC^2}{BC^2}$

三式相乘有

$$\frac{BD_3}{D_3C}\cdot\frac{CE_3}{E_3A}\cdot\frac{AF_3}{F_3B}=\frac{AB^2}{AC^2}\cdot\frac{BC^2}{AB^2}\cdot\frac{AC^2}{BC^2}=1$$

由塞瓦定理逆定理知AD_3,BE_3,CF_3三线共点

即 L 为莱莫恩点

证毕。