第 拾 贰 章

九点圆

I. 九点圆（nine-point circle）

三角形三边的中点，三高的垂足和三个欧拉点（三角形各顶点与垂心连线的中点），九点共圆。

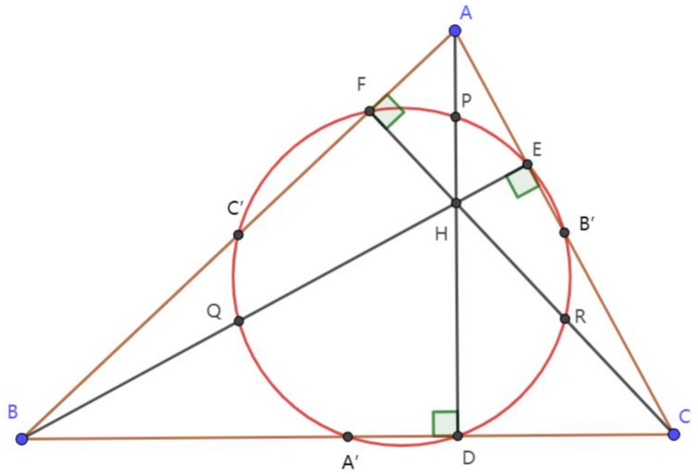
该圆常被称为九点圆，欧拉圆或费尔巴哈圆

II. 背景

九点圆是几何学史上的一个著名问题，最早提出九点圆的是英国的培亚敏·俾几【Benjamin Beven】，问题发表在 1804 年的一本英国杂志上，第一个完全证明此定理的是法国数学家彭赛列【1788-1867】,也有说是 1820-1821 年间由法国数学家热尔工【1771-1859】与彭赛列首先发表的，一位高中教师费尔巴哈【1800-1834】也曾研究了九点圆，他的证明发表在 1822 年的《直边三角形的一些特殊点的性质》一文里，文中费尔巴哈还获得了九点圆的一些重要性质，故有人称九点圆为费尔巴哈圆。

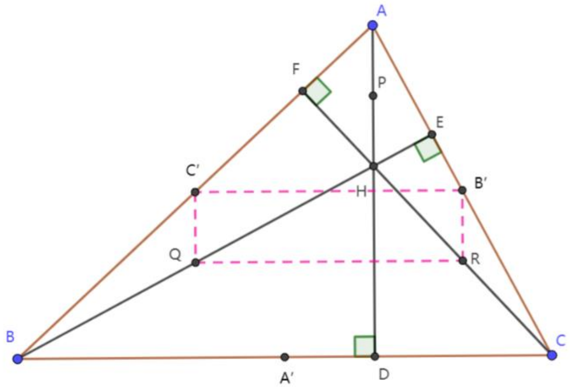
III. 定理证明

定理：如图，A'，B'，C'分别为 BC，AC，AB 的中点，$AD \perp BC$于 D，$BE \perp AC$于 E，$CF \perp AB$于 F，H 为三角形 ABC 的垂心，P，Q，R 分别是 AH，BH，CH 的中点，那么A'，B'，C'，D，E，F，P，Q，R九点共圆。



证明：连接$C'Q$，$C'B'$，$B'R$，RQ

如图



由于C'，B'，Q，R分别为AB，AC，BH，CH中点

所以$C'Q=\frac{1}{2}AH=B'R$，$C'Q//AH//B'R$

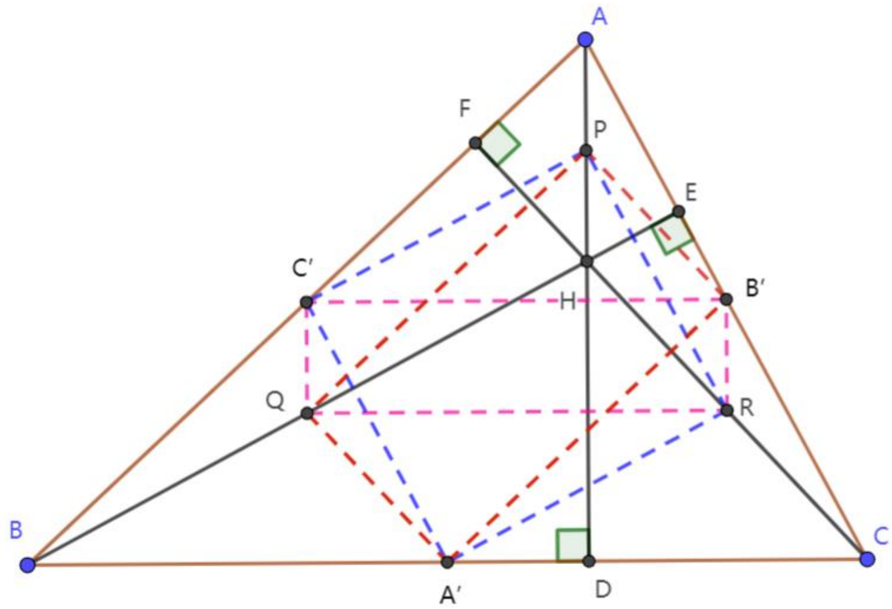
$C'B'=\frac{1}{2}BC=QR$，$C'B'//BC//QR$

又$AH\perp BC$

所以$C'Q\perp QR$，$C'Q\perp C'B'$，$C'B'\perp B'R$

所以四边形C'QRB'为矩形

同理有矩形$PC'A'R$（下图蓝色），矩形$PQA'B'$（下图褐色）



其都有一条对角线为$C'R$或QB'

而矩形C'QRB'（图中粉色）的对角线为$C'R$和QB'

所以$C'R$和QB'均为其外接圆的直径

所以矩形$PC'A'R$和矩形$PQA'B'$与矩形C'QRB'的外接圆为同一圆

那么A'，B'，C'，P，Q，R共圆

再连接PA'，易知其为矩形$PQA'B'$对角线，所以PA'也为直径

而PD$\perp A'D$（高）

所以$\angle PDA'=90°$

所以 D 在圆上

同理，E，F 均在圆上

那么A'，B'，C'，D，E，F，P，Q，R九点共圆

证毕。