第 拾 壹 章

共角定理和坎迪定理

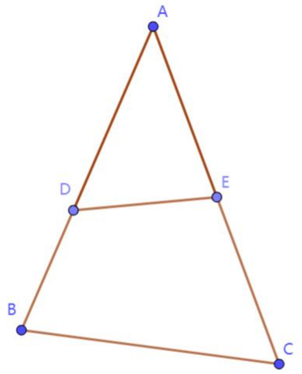
I. 共角定理（又称“鸟头定理”）

若两三角形有一组对应角相等或互补，则它们的面积比等于对应角两边乘积的比。

证明：

（1） 若有一对对应角相等

如图：将对应角重合



则$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AD\cdot AE\cdot sin\angle DAE$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot sin\angle BAC$

所以

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}AD\cdot AE\cdot sin\angle DAE}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot sin\angle BAC}$$

而$\angle DAE=\angle BAC$

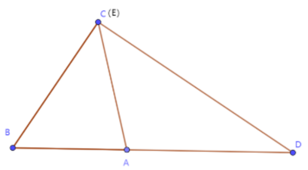
所以

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AD\cdot AE}{AB\cdot AC}$$

证毕

（2） 若有一对对应角互补

如图：将对应角拼接为一个平角



$$\angle CAD + \angle CAB = 180°$$

所以$sin\angle CAD = sin\angle CAB$

所以

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot AE \cdot sin\angle DAE}{\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot sin\angle BAC}$$

则

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC}$$

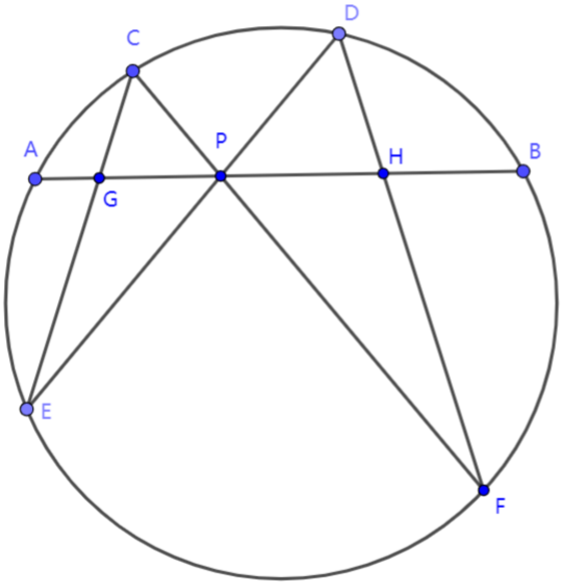
证毕。

II. 坎迪定理

Candy Theorem

（1） 定义

如图



AB 为圆内的一段弦，P 为 AB 上任意一点，C，D 为圆上的任意两点，连接 CP，DP 并延长分别交于 F，E，连接 CE，DF 分别交 AB 于 G，H，设 AP=a ，BP=b ，GP=x ，HP=y，则

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

注：坎迪定理是蝴蝶定理的一般形式

证明：由图可知

$$1 = \frac{S_{\triangle CGP}}{S_{\triangle PDH}} \cdot \frac{S_{\triangle PDH}}{S_{\triangle PGF}} \cdot \frac{S_{\triangle PGF}}{S_{\triangle PEH}} \cdot \frac{S_{\triangle PEH}}{S_{\triangle GCP}}$$

由共角定理知

$$1 = \frac{CG \cdot CP}{PD \cdot DH} \cdot \frac{PD \cdot PH}{PG \cdot PF} \cdot \frac{PF \cdot GF}{PE \cdot EH} \cdot \frac{PE \cdot PH}{CP \cdot GP} = \frac{PH^2}{PG^2} \cdot \frac{CG \cdot GF}{DH \cdot HE}$$

由相交弦定理知 CG • GF=AG • BG，DH • HE=AH • HB

所以

$$1=\frac{PH^2}{PG^2}\cdot\frac{CG\cdot GF}{DH\cdot HE}=\frac{PH^2}{PG^2}\cdot\frac{\mathrm{AG}\cdot\mathrm{BG}}{\mathrm{AH}\cdot\mathrm{HB}}$$

所以

$$\frac{PH^2}{PG^2}=\frac{\mathrm{AH}\cdot\mathrm{HB}}{\mathrm{AG}\cdot\mathrm{BG}}$$

设 AP=a ，BP=b ，GP=x ，HP=y

所以$\frac{y^2}{x^2}=\frac{(a+y)(b-y)}{(a-x)(b+x)}$

$$(a-x)(b+x)y^2=(b-y)(a+y)x^2$$
$$[ab-(b-a)x-x^2]y^2=[ab+(b-a)y-y^2]x^2$$
$$aby^2-(b-a)xy^2-x^2y^2=abx^2+(b-a)yx^2-y^2x^2$$
$$aby^2-(b-a)xy^2=abx^2+(b-a)yx^2$$
$$aby^2-abx^2=(b-a)yx^2+(b-a)xy^2$$
$$ab(y^2-x^2)=(b-a)xy(y+x)$$
$$ab(y-x)(y+x)=(b-a)xy(y+x)$$
$$ab(y-x)=(b-a)xy$$
$$\frac{y-x}{xy}=\frac{b-a}{ab}$$
$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

证毕。