

第拾章

圆幂定理，弦切角定理

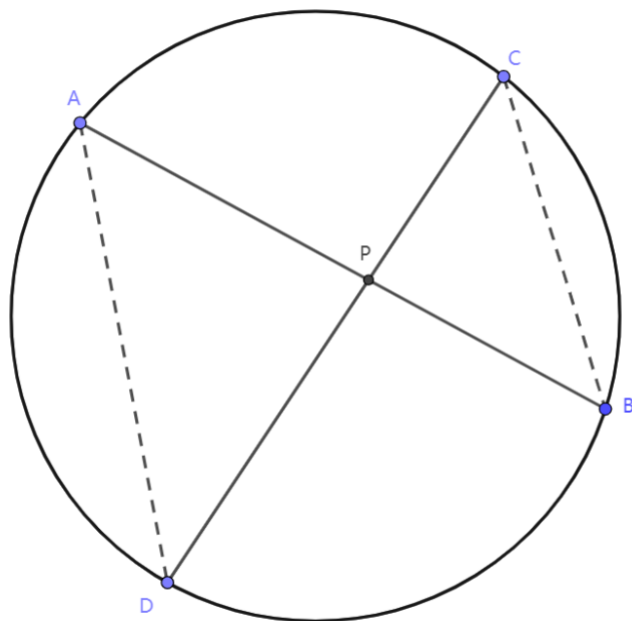
I. 圆幂定理

(1) 定义

圆幂定理是相交弦定理，割线定理，切割线定理的总称
注意：切线长定理不包括在内

(2) 相交弦定理

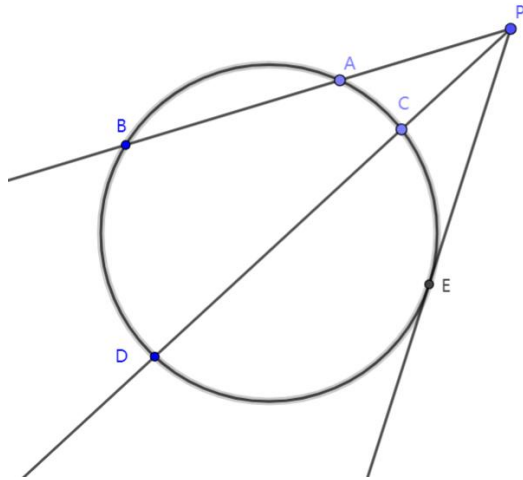
在圆中两弦相交，交点分成的两线段积相等
如图即 $AP \cdot BP = CP \cdot DP$



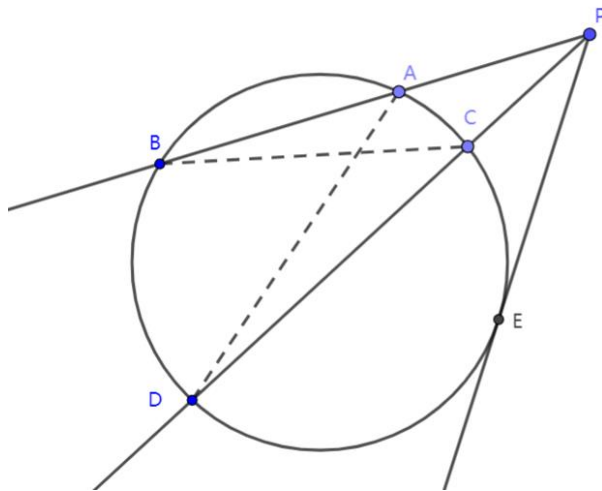
证明：连接 AD, BC
因为 A, B, C, D 共圆
所以 $\angle DAB = \angle DCB$, $\angle ADC = \angle ABC$
所以 $\triangle DAP \sim \triangle BCP$
所以 $\frac{AP}{CP} = \frac{DP}{BP}$
所以 $AP \cdot BP = CP \cdot DP$
证毕

(3) 割线定理和切割线定理

过圆外一点 P 引圆的任意割线，P 点与近交点的线段长和 P 点与远交点的线段长的乘积为一个定值，并等于过 P 点的切线长的平方。
即如图有 $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE^2$



证明：连接 BC，AD



所以 $\angle ABC = \angle ADC$

所以 $\triangle PBC \sim \triangle PDA$

所以 $\frac{PB}{PD} = \frac{PC}{PA}$

所以 $PB \cdot PA = PC \cdot PD$

当 PE 相切于圆时

A, B (或 C, D) 重合

所以 $PA \cdot PB = PE \cdot PE = PE^2$

所以 $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE^2$

证毕

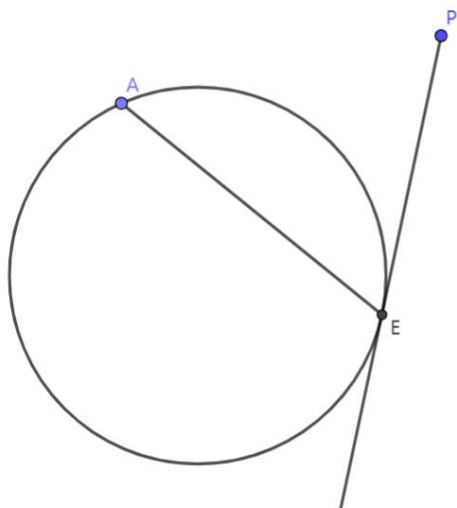
割线定理： $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

切割线定理： $PA \cdot PB = PE^2$

II. 弦切角定理

(1) 弦切角

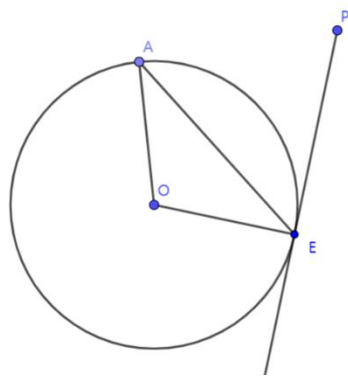
以圆中一条弦的顶点为切点作切线，切线与弦交织的角为弦切角，如图中 $\angle PEA$ 。



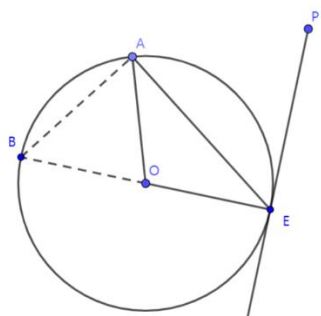
(2) 弦切角定理

圆中一弦切角等于此弦所对圆心角的一半

$$\text{即 } \angle PEA = \frac{1}{2} \angle AOE$$



证明：延长 OE 交圆 O 于 B，连接 AB



因为 PE 为圆 O 切线

所以 $\angle BEP = 90^\circ$

因为 BE 为直径

所以 $\angle BAE = 90^\circ$

所以 $\angle BEA + \angle B = 90^\circ$, $\angle BEA + \angle PEA = 90^\circ$

所以 $\angle B = \angle PEA$

因为 $\angle B = \frac{1}{2}\angle AOE$

所以 $\angle PEA = \frac{1}{2}\angle AOE$

证毕。