

第 捌 章

戴德金分割理论

I, 描述

戴德金原理(Dedekind principle)亦称戴德金分割，是保证直线连续性的基础。

其内容为：

如果把直线的所有点分成两类，使得：

1. 每个点恰属于一个类，每个类都不空。
2. 第一类的每个点都在第二类的每个点的前面，或者在第一类里存在着这样的点，使第一类中所有其余的点都在它的前面；或者在第二类里存在着这样的点，它在第二类的其余点的前面。

这个点决定直线的戴德金割切，此点称为戴德金点(或界点)。

戴德金原理是戴德金((J.W.)R.Dedekind)于 1872 年提出来的，在构造欧氏几何的公理系统时，可以选取它作为连续公理，在希尔伯特公理组I, II, III的基础上，阿基米德公理和康托尔公理合在一起与戴德金原理等价。

II, 背景

尤利乌斯·威廉·理查德·戴德金 (Julius Wilhelm Richard Dedekind , 1831.10.6-1916.2.12) 又译狄德金，伟大的德国数学家、理论家和教育家，近代抽象数学的先驱。据《辞海》，戴德金还是哥廷根大学哲学博士、柏林科学院院士。

中文名：戴德金

外文名：Julius Wilhelm Richard Dedekind



国籍：德国

出生日期：1831 年 10 月 6 日

逝世日期：1916 年 2 月 12 日

戴德金的主要成就是在代数理论方面。他研究过任意域、环、群、结构及模等问题，并在授课时率先引入了环（域）的概念，并给理想子环下了一般定义，提出了能和

自己的真子集建立一对应的集合是无穷集的思想。在研究理想子环理论过程中，他将序集（置换群）的概念用抽象群的概念来取代，并且用一种比较普通的公式（戴德金分割概念）表示出来，比康托尔的公式要简化得多，并直接影响了后来皮亚诺的自然数公理的诞生。是最早对实数理论提出了许多论据的数学家之一。1855年在教授伽罗瓦理论时引入了“域”的概念。

III, 定义

若将实数集 R 分成两个子集 S 和 T ，它们满足：

(1) $S \neq \emptyset$ 且 $T \neq \emptyset$;

(2) $R = S \cup T$;

(3) $\forall x \in S, \forall y \in T$, 总有 $x < y$ (称 S 为左集, T 为右集)

则称为实数集 R 的一个戴德金分割, 记为 (S, T) 。

“戴德金分割”的第一条要求是左集 S 与右集 T 都不是空集, 也就是说它们中都有实数, 简称为**不空**。第二条要求是 S 和 T 包含了所有的实数, 换句话说, 对于任何一个实数或者属于左集 S 或者属于右集 T , 二者必居其一, 简称为**不漏**。第三条要求是左集 S 中的实数都比右集 T 中的实数小, 简称为**不乱**。由第三条可以推知左集 S 中的实数不会在右集 T 中出现, 右集 T 中的数也不会出现在左集 S 中出现。若 x 属于左集, 凡小于 x 的实数也都属于左集, 若 y 属于右集, 凡大于 y 的实数也都属于右集。

如令

$$S = \{x \in R \mid x \leq 0 \text{ 或 } x^2 \leq 2\},$$

$$T = \{x \in R \mid x > 0 \text{ 且 } x^2 > 2\}$$

可以验证 (S, T) 是一个戴德金分割。

再如令

$$S = \{x \in R \mid \text{存在自然数 } n, \text{ 使 } \frac{n}{n+1} \geq x\},$$

$$T = \{x \in R \mid x \geq 1\}.$$

这也确定了一个戴德金分割 (S, T) 。

第一个戴德金分割中, 左集 S 有最大数 $\sqrt{2}$, 而右集 T 没有最小数;

第二个戴德金分割正相反, 左集 S 没有最大数, 而右集 T 有最小数 1。

$\sqrt{2}$ 和 1 都叫做相应的戴德金分割的**中介点**。

一般说来, **实数上的戴德金分割必有中介点, 而在有理数集上若类似地作一个戴德金分割就不一定有中介点了。**

例如若令

$$S = \{x \in Q \mid x \leq 0, \text{ 或 } x^2 \leq 2\},$$

$$T = \{x \in Q \mid x > 0, \text{ 且 } x^2 > 2\},$$

则 (S, T) 构成对有理数集 Q 的戴德金分割, 但左集 S 无最大数; 右集 T 无最小数, 也就是 (S, T) 没有中介点。

IV, 实数构造（戴德金定理）

19世纪戴德金利用他提出的分割理论, 从对有理数集的分割精确地给出了实数的定义, 并且该定义作为现代数学实数理论的基础之一可以推出实数理论中的六大基本定理:**确界原理、单调有界定理、闭区间套定理、有限覆盖定理、致密性定理和柯西收敛准则。**

在对有理数集 Q 利用戴德金分割构造实数之前，先给出一个引理：

任意两个有理数之间，必然存在无数个有理数。

引理非常容易证明，设 a 和 b 是两个有理数，那么它们的算术平均值 $c = \frac{a+b}{2}$ 也必然

是有理数并且 c 一定介于 a 和 b 之间，再用 a 和 c 或 b 和 c 继续算术平均，可以得到无数个有理数。

现在对有理数集 Q 任意作一个戴德金分割 (S, T) ，此时可能会出现以下 3 种情况：

(1) S 中有最大值，而 T 中无最小值。

例如： $S = \{x|x \leq 2\}$ ， $T = \{x|x > 2\}$

(2) S 中无最大值，而 T 中有最小值。

例如： $S = \{x|x < 2\}$ ， $T = \{x|x \geq 2\}$

(3) S 中无最大值，且 T 中无最小值。

例如： $S = \{x|x < 0 \text{ 或 } x^2 < 2\}$ ， $T = \{x|x > 0 \text{ 且 } x^2 > 2\}$

不存在以下情况：

(4) S 中有最大值，且 T 中有最小值。

这是因为如果设 S 中的最大值为 a ， T 中的最小值为 b ，根据引理，它们的算术平均数 c 也是有理数且 $a < c < b$ 。但因为 a 是 S 中的最大值，所以 c 不在 S 中。而 b 是 T 中的最小值，所以 c 也不在 T 中。这就导致了有理数 c 不属于 S 和 T 的任意一个集合，与戴德金分割要求 $S \cup T = \text{全集 } Q$ 矛盾。对于情况 (1) 和 (2) 戴德金称该分割确定了一个有理数，或者把这样的分割叫做一个有理数。对于 (3)，戴德金称该分割确定了一个无理数，或者把这样的分割叫做一个无理数。有理数和无理数统称为实数，记做 R ，因此每个实数就是一个对有理数集 Q 的分割。

在这样的定义下可以给出实数相等的定义以及大小的比较。

相等：设实数 a, b 是两个戴德金分割 $(S, T), (S', T')$ 。若集合 $S=S'$ (此时必有 $T=T'$)，则称 $a=b$ 。

大小比较：若集合 $S \subsetneq S'$ ，则称 $a < b$ 。若集合 $S \subseteq S'$ ，则称 $a \leq b$ 。

也就是说，要证明两个实数相等，只需要证明分割所得到的 S 和 S' 相等。

戴德金定理：

实数集 R 的任一戴德金分割 (S, T) ，都唯一地确定一个实数 α (称为中介数或中介点)，它或者是 S 的最大数(此时 T 中无最小数)，或者是 T 的最小数(此时 S 中无最大数)。