第 柒 章

斐波拉契数列

I. 斐波拉契数列

斐波拉契数列又称黄金分割数列，兔子数列，指的是这样一个数列：0，1，1，2，3，5，8，13，21，34……在数学上，斐波拉契数列以如下被递归的方法定义：F(0)=0,F(1)=1,F(n)=F(n-1)+F(n-2) $(n \geq 2, n \in N^+)$

在现代物理，准晶体结构，化学等领域，斐波拉契数列都有直接的应用。为此，美国数学会从 1963 年起出版了以《斐波拉契数列季刊》为名的一份数学杂志，用于专门研究刊载这方面的研究成果。

中文名：斐波拉契数列

外文名：Fibonacci Sequence

别称：黄金分割数列，兔子数列

所属：数论

II. 列昂纳多·斐波拉契（Leonardo Fibonacci）

意大利数学家（1170---1250），籍贯是比萨。他被人称作“比萨的列昂纳多”。1202 年，他撰写了《算盘全书》（Liber Abacci）一书。他是第一个研究了印度和阿拉伯数学理论的欧洲人。他的父亲被比萨的一家商业团体聘为外交领事，派驻地点相当于今日的阿尔及利亚地区，列昂纳多因此得以在一个阿拉伯老师的指导下研究数学。他曾经在埃及，叙利亚，希腊，西西里和普罗旺斯等地研究数学

III. 数列定义

如果设 F(n)为该数列的第 n 项（$n \in N^+$）

那么斐波拉契数列的递推式为：

F(n)=F(n-1)+F(n-2) $(n \geq 2, n \in N^+)$

其中 F(0)=0,F(1)=1

其通项公式为

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$$

又称为“比内公式”，是用无理数表示有理数的一个范例。

IV. 通项公式的推导

很显然，这是一个线性递归数列

我们可以用线性代数解法求解其通项，即特征根方法

求解过程如下：

F(n)=F(n-1)+F(n-2) 其特征方程为

$$x^2 = x + 1$$

解得$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

则设$F(n) = A \cdot x_1^n + B \cdot x_2^n$

即$F(n) = A \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

由于 F(0)=0,F(1)=1

所以

$$\begin{cases} A \cdot 1 + B \cdot 1 = 0 \\ A \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + B \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1 \end{cases}$$

$$解得\begin{cases} A = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ B = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

则

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$$

推导完成

V. 特征根方法求数列通项

对于线性齐次递归数列，我们求其通项公式可以使用特征根法

即：对于线性齐次 n 项递归数列，其递归式为

$$a_n = p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-2} + p_3 a_{n-3} + \ldots + p_{m-1} a_{n-m+1} + p_m a_{n-m}$$
$$即 a_{n+m} = p_1 a_{n+m-1} + p_2 a_{n+m-2} + p_3 a_{n+m-3} + \ldots + p_{m-1} a_{n+1} + p_m a_n$$

其拥有的特征方程为：

$$x^m = p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_{m-1} x^2 + p_m x$$

其有 m 个解，设其为$x_1, x_2, \ldots, x_m$

那么可设其通项公式为

$$a_n = A_1 x_1^n + A_2 x_2^n + \ldots + A_m x_m^n$$

根据已知条件【题中一定会给出$a_1, a_2, \ldots, a_m$的值，否则无法求解】

$$a_1 = B_1, a_2 = B_2, \ldots, a_m = B_m$$

获方程组：

$$\begin{cases} B_1 = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_m x_m \\ B_2 = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots + A_m x_m^2 \\ \ldots\ldots \\ B_m = A_1 x_1^m + A_2 x_2^m + \ldots + A_m x_m^m \end{cases}$$

$$即可解出 A_1，A_2，\ldots，A_m$$
$$即有通项公式$$

注意：如果特征方程仅有一解，即$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = k$

此时如果再用上面的方法就无法求解

此时通项公式要设为

$$a_n = (A_1 n^{m-1} + A_2 n^{m-2} + \ldots + A_{m-1} n + A_m) k^n$$

再求解即可。

VI. 斐波拉契数列的命题背景

数学家斐波拉契提出兔子数列的背景：

已知，有一对成年兔子，一雌一雄，每隔一个月就会生出一对幼年兔子，假设每次生出的兔子仅一对且为一雌一雄，幼兔也恰好在一个月后长为成年兔且交配，并且假设所有兔子均不会死去，问 n 个月后有几对成年兔？

从第一个月开始，有一对兔子（成年）

第二个月，生出一对幼兔，现在仍然只有一对成年兔

第三个月，生出一对幼兔，同时幼兔长大

第四个月，生出两对幼兔，幼兔长大一对

……

不难发现，成年兔子对数如下表变化

月数/月	1	2	3	4	5	6	…
成年兔子对数/对	1	1	2	3	5	8	…

设第 n 个月有 F（n）对成年兔

则 F(n)=F(n-1)+F(n-2)，其中 F(1)=1,F(2)=1 $(n \geq 2, n \in N^+)$

即斐波拉契数列的递推式，因此斐波拉契数列也被称为“兔子数列”。

VII. 与黄金分割的关系

有趣的是，这样一个完全是自然数的数列，通项公式竟用无理数来表达，并且当 n 趋近于无穷大时，前一项与后一项的比值越来越接近于黄金分割比或者也说后一项与前一项的比值的小数部分越发趋近于黄金分割比

$$1 \div 1 = 1,$$
$$1 \div 2 = 0.5,$$
$$2 \div 3 = 0.666,$$
$$3 \div 5 = 0.6,$$
$$5 \div 8 = 0.625,$$
$$\dots,$$
$$55 \div 89 = 0.617977 \dots,$$
$$\dots \dots,$$
$$144 \div 233 = 0.618025 \dots,$$
$$\dots \dots,$$
$$46368 \div 75025 = 0.6180339886\dots$$

因此，斐波拉契数列又叫黄金分割数列。