第 陆 章

欧拉公式

I. 莱昂哈德·欧拉

Leonhard Euler（1707.4.15---1783.9.18）

瑞士数学家，自然科学家，1707 年生于瑞士巴塞尔，1783 年于俄国圣彼得堡去世。他是 18 世纪数学界最杰出的人物之一，他不但为数学界作出贡献，更把整个数学推至物理领域。他是数学史上最多产的数学家，平均每年写出八百多页论文，还写了大量的力学、分析学、几何学、变分法等的课本。《无穷小分析引论》、《微分学原理》、《积分学原理》等都成为数学界中的经典著作。欧拉对数学的研究如此广泛，因此在许多数学分支中也经常可以见到以他名字命名的重要常数、公式和定理。此外欧拉还涉及建筑学、弹道学、航海学等领域。

II. 欧拉公式

世界上最完美的平面对称图形是圆，用直径除圆周得到的一个数值，被证明是无理数。而这个符号π也是欧拉第一个确定使用并普及的。

数学史上最令人敬畏和称赞的超越数，与自然最为亲和的无理数是欧拉首次使用e来代替的自然常数。

虚数单位 i，它将实数集再次扩大到复数集，$i^2 = -1$，虚数是数学史上一个崭新的里程碑，而 i 也是欧拉首创的。

而象征着数学，与数学和我们最亲近的，就是数字 0 和 1。

而欧拉将它们组合起来，两个超越数“π”“e”，一个虚数单位“i”，最熟悉的“0”“1”

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

这个最优美，最简洁的公式就以他的名字命名，称作“欧拉公式”

在物理中，它联系了圆周运动、简谐运动、机械波、电磁波、概率波……

诺奖得主查理·费曼称该公式为“我们的珍宝”和“数学中最非凡的公式”

德国天才数学家高斯（Carl Friedrich Causs）评价：

　　一个人第一次看到这个公式而不感到它的魅力，这个人绝不会成为一流的数学家。

数学家们评价它是“上帝创造的公式，我们只能看到它却不能完全理解它”

所以这个公式被广泛誉为“上帝公式”

中文名：欧拉公式，上帝公式

别称：欧拉方程

外文名：Euler’s formula

提出时间：1752 年

提出者：莱昂哈德·欧拉

应用学科：数学，物理

适用领域：复数，三角形，拓扑学

III. 欧拉公式的证明

（I） 复数算法

复数 z=a+bi 已经适用了加减乘除算法，但计算乘方或开方，指数和对数就比较困难，于是就有了其他表示形式

1. 几何形式：z=a+bi
2. 向量形式：z=(a,b)
3. 三角形式：$z=|z|(cos\theta+i\cdot sin\theta)$

   式中$|z|$为 z 的模，θ为 x 轴与向量 Oz 夹角

   这种形式就可以进行幂的计算

（II） 欧拉公式证明

根据泰勒展开（详见第三卷第二章），我们由麦克劳林公式：

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots..$$

$$sinx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots..$$

$$cosx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots..$$

现将其中的 x 全部换成$i\theta$，$i\theta$可以进行实数运算，因此可以代入则

$$e^{i\theta}=1+i\theta+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\ldots..$$

由于$i^2=-1$

我们有：

$$e^{i\theta}=1+i\theta-\frac{\theta^2}{2!}-\frac{i\cdot\theta^3}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+\frac{i\cdot\theta^5}{5!}+\ldots..$$

$$=(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\ldots)+(i\theta-\frac{i\cdot\theta^3}{3!}+\frac{i\cdot\theta^5}{5!}-\frac{i\cdot\theta^7}{7!}+\ldots)$$

$$=(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\ldots)+i\cdot(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\ldots)$$

$$=cos\theta+i\cdot sin\theta$$

所以$e^{i\theta}=cos\theta+i\cdot sin\theta$

令$\theta=\pi$，则$e^{\pi i}=-1+0$，即$e^{\pi i}+1=0$

证毕