

# 第五章

## 柯西不等式

### I. 柯西不等式

一. 柯西 (Cauchy) 不等式是指:

设  $a_i, b_i \in R$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  
则

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

当且仅当  $a_i = kb_i$  时 ( $k \in R$ ) 取等号

这个不等式的应用十分广泛, 由其可以推导众多常用不等式

### 二. 资料

柯西不等式是由大数学家柯西 (Cauchy) 在研究数学分析中的“流数”问题时得到的, 但从历史角度想, 该不等式应称为

**Cauchy-Buniakowsky-Schwarz 不等式**

**【柯西-布尼亚科夫斯基-施瓦茨不等式】**

因为, 正是后两位数学家彼此独立地在积分学中推而广之, 才将这一不等式应用到近乎完善的地步。柯西不等式是柯西在研究过程中发现的一个不等式, 其在解决不等式证明的有关问题中有着十分广泛的应用, 所以在高等数学提升中与研究中非常重要, 是高等数学研究内容之一

中文名: 柯西不等式

外文名: Cauchy-Buniakowsky-Schwarz Inequality

提出者: 奥古斯丁·路易·柯西

提出时间: 18 世纪

推广者: 赫尔曼·阿曼杜斯·施瓦茨

### II. 证明方法

证法一: 移项, 即证

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} & \text{即} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2) \times (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{n-1}^2 + b_n^2) \\ & \quad - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

我们将其化开, 减号前面部分化开后即为下表各数之和

表 1	$a_1^2$	$a_2^2$	$a_3^2$	.....	$a_{n-1}^2$	$a_n^2$
$b_1^2$	$a_1^2 b_1^2$	$a_2^2 b_1^2$	$a_3^2 b_1^2$	.....	$a_{n-1}^2 b_1^2$	$a_n^2 b_1^2$
$b_2^2$	$a_1^2 b_2^2$	$a_2^2 b_2^2$	$a_3^2 b_2^2$	.....	$a_{n-1}^2 b_2^2$	$a_n^2 b_2^2$
$b_3^2$	$a_1^2 b_3^2$	$a_2^2 b_3^2$	$a_3^2 b_3^2$	.....	$a_{n-1}^2 b_3^2$	$a_n^2 b_3^2$
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$b_{n-1}^2$	$a_1^2 b_{n-1}^2$	$a_2^2 b_{n-1}^2$	$a_3^2 b_{n-1}^2$	.....	$a_{n-1}^2 b_{n-1}^2$	$a_n^2 b_{n-1}^2$
$b_n^2$	$a_1^2 b_n^2$	$a_2^2 b_n^2$	$a_3^2 b_n^2$	.....	$a_{n-1}^2 b_n^2$	$a_n^2 b_n^2$

减号右边利用 n 数和完全平方公式可得

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 = a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 + \dots + a_{n-1}^2 b_{n-1}^2 + a_n^2 b_n^2 + A \quad (*)$$

其中 A 为下表各数之和:

表 2	$a_1 b_1$	$a_2 b_2$	$a_3 b_3$	...	$a_{n-1} b_{n-1}$	$a_n b_n$
$a_1 b_1$	-----	$a_1 b_2 a_2 b_1$	$a_1 b_3 a_3 b_1$	...	$a_1 b_{n-1} a_{n-1} b_1$	$a_1 b_n a_n b_1$
$a_2 b_2$	$a_1 b_2 a_2 b_1$	-----	$a_2 b_3 a_3 b_2$	...	$a_2 b_{n-1} a_{n-1} b_2$	$a_2 b_n a_n b_2$
$a_3 b_3$	$a_1 b_3 a_3 b_1$	$a_2 b_3 a_3 b_2$	-----	...	$a_3 b_{n-1} a_{n-1} b_3$	$a_3 b_n a_n b_3$
.....	.....	.....	.....	-	.....	.....
$a_{n-1} b_{n-1}$	$a_1 b_{n-1} a_{n-1} b_1$	$a_2 b_{n-1} a_{n-1} b_2$	$a_3 b_{n-1} a_{n-1} b_3$	...	-----	$a_n b_{n-1} a_{n-1} b_n$
$a_n b_n$	$a_1 b_n a_n b_1$	$a_2 b_n a_n b_2$	$a_3 b_n a_n b_3$	...	$a_n b_{n-1} a_{n-1} b_n$	-----

观察该表, 可知其具有对称性, 表中各数之和为:

$$A = 2 \sum_{i \neq j}^n a_i b_j a_j b_i$$

而 (\*) 式中蓝色部分与表 1 中红色部分抵消

观察可知:  $a_2^2 b_1^2$  (绿色) -  $2a_2 b_1 a_1 b_2$  (A) +  $a_1^2 b_2^2$  (绿色) =  $(a_2 b_1 - a_1 b_2)^2$

其他各项均可如此配对

那么

$$\begin{aligned} & (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2) \times (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{n-1}^2 + b_n^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \\ &= (a_2 b_1 - a_1 b_2)^2 + (a_3 b_2 - a_2 b_3)^2 + \dots + (a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n)^2 \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

不等式成立, 证毕。

证法二: 若

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = 0$$

则  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ , 此时不等式显然成立

当

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \neq 0$$

时, 构造函数 (二次函数)

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)x + \sum_{i=1}^n b_i^2$$

利用完全平方公式

$$\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2\sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2$$

那么

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)x + \sum_{i=1}^n b_i^2 = \sum_{i=1}^n (a_i x - b_i)^2 \geq 0$$

那么方程  $f(x) = 0$  的判别式  $\Delta \leq 0$

即

$$\Delta = 4\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \leq 0$$

即证

### III. 推广及证明其他不等式

#### 一. 平均不等式

定义：设  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  为  $n$  个正实数，记

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$$

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

其中  $H_n, G_n, A_n, Q_n$  分别称为这  $n$  个数的调和平均，几何平均，算术平均，平方平均

则有  $H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n$

等号成立当且仅当  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

证明：(1) 证明  $G_n \leq A_n$

取集合  $S = \{2^m | m \in \mathbb{N}^*\}$

当  $n \in S$  时

$$A_n = \frac{1}{2^m} (a_1 + a_2 + \dots + a_{2^m}) = \frac{a_1 + a_2}{2^m} + \frac{a_3 + a_4}{2^m} + \dots + \frac{a_{2^{m-1}} + a_{2^m}}{2^m}$$

由基本不等式

$$A_n = \frac{1}{2^{m-1}} \left( \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2} + \dots + \frac{a_{2^{m-1}} + a_{2^m}}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{2^{m-1}} (\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4} + \dots + \sqrt{a_{2^{m-1}} a_{2^m}}) \\
&= \frac{1}{2^{m-2}} \left( \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} + \frac{\sqrt{a_5 a_6} + \sqrt{a_7 a_8}}{2} + \dots + \frac{\sqrt{a_{2^{m-3}} a_{2^{m-2}}} + \sqrt{a_{2^{m-1}} a_{2^m}}}{2} \right) \\
&\geq \frac{1}{2^{m-2}} (\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} + \sqrt[4]{a_5 a_6 a_7 a_8} + \dots + \sqrt[4]{a_{2^{m-3}} a_{2^{m-2}} a_{2^{m-1}} a_{2^m}}) \\
&= \dots \geq \sqrt[2^m]{a_1 a_2 a_3 \dots a_{2^m}} = G_n
\end{aligned}$$

即  $n \in S$  对  $G_n \leq A_n$  恒成立

下面证明  $n \in N^* - S$  时 (即对任何不为  $2^m$  的整数) 也有  $G_n \leq A_n$

设  $n < 2^m, n \in N^* - S$

$$\text{则 } A_n = \frac{1}{2^m} \cdot 2^m A_n = \frac{1}{2^m} [n A_n + (2^m - n) A_n]$$

而由定义知  $n A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

且  $(2^m - n) A_n = A_n + A_n + \dots + A_n$  【 $2^m - n$  个  $A_n$ 】

$$\text{则 } A_n = \frac{1}{2^m} [a_1 + a_2 + \dots + a_n + A_n + A_n + \dots + A_n \text{ 【} 2^m - n \text{ 个 } A_n \text{】}]$$

这里有  $2^m$  个数, 可以利用上面的公式得到

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{2^m} [a_1 + a_2 + \dots + a_n + A_n + A_n + \dots + A_n] \\
&\geq (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n \cdot A_n \cdot A_n \cdot \dots \cdot A_n)^{\frac{1}{2^m}} \\
&= (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n \cdot A_n^{2^m - n})^{\frac{1}{2^m}}
\end{aligned}$$

$$\text{即 } A_n \geq (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n)^{\frac{1}{2^m}} \cdot (A_n^{2^m - n})^{\frac{1}{2^m}}$$

两边同时乘方  $2^m$ , 得到

$$A_n^{2^m} \geq a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n \cdot A_n^{2^m - n}$$

而  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = G_n^n$

则

$$A_n^{2^m} \geq G_n^n \cdot A_n^{2^m - n}$$

移项即得  $A_n^n \geq G_n^n$

即有  $G_n \leq A_n$

综上所述, 对任意  $n \in N^*$ , 都有  $G_n \leq A_n$ , 证毕。

(2) 证明  $G_n \geq H_n$

比较简单

$$\frac{1}{H_n} = \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n}$$

利用  $A_n \geq G_n$ , 有

$$\frac{1}{H_n} = \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}} = \frac{1}{G_n}$$

$$\text{即 } \frac{1}{H_n} \geq \frac{1}{G_n} \Rightarrow G_n \geq H_n$$

(3) 证明  $A_n \leq Q_n$

$$\text{知 } A_n = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}, Q_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}}$$

即证

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} &\leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}} \\ \Rightarrow \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}{n^2} &\leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n} \\ \Rightarrow (\sum_{i=1}^n a_i)^2 &\leq n \sum_{i=1}^n a_i^2 \end{aligned}$$

而

$$n = \sum_{i=1}^n 1 = \sum_{i=1}^n 1^2$$

则

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot 1\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n 1^2\right) \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)$$

这个式子就是前面证明的柯西不等式【 $b$ 全为1】，证毕。

## 二. 变形

(I) 设  $a_i \in R, b_i > 0 (i = 1, 2, 3, \dots, n)$  则

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}{\sum_{i=1}^n b_i}$$

等号成立当且仅当  $b_i = k a_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$

证明：移项有

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i}\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2$$

而

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i}\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i\right) = \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{\sqrt{b_i}}\right)^2\right] \left[\sum_{i=1}^n (\sqrt{b_i})^2\right]$$

由柯西不等式

$$\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{\sqrt{b_i}}\right)^2\right] \left[\sum_{i=1}^n (\sqrt{b_i})^2\right] \geq \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{\sqrt{b_i}} \cdot \sqrt{b_i}\right)\right]^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2$$

证毕。

(II) 设  $a_i, b_i$  同号且不为 0 ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ), 则

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}{\sum_{i=1}^n a_i b_i}$$

等号成立当且仅当  $b_1 = b_2 = \dots = b_n$

证法同上。